الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (طريقة المؤثر D)

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D=\frac{d}{dx} \qquad ,D^2=\frac{d^2}{dx^2} \qquad ,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

وتكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x)\ \ldots\ldots\ldots(*)$$

مثال: لو أعدنا كتابة المعادلة $y'''-y''-4y'+4y=0$ بدلالة المؤثر فإنها ستكون بالشكل

$$(D^3-D^2-4D+4)y=0$$

خواص المؤثر

1) $D^mf(x)+D^nf(x)=D^nf(x)+D^mf(x)$

2) $D^mD^nf(x)=D^nD^mf(x)=D^{n+m}f(x)$

3) $D^n(f(x)\pm g(x))=D^nf(x)\pm D^ng(x)$

4) $D^n\big(cf(x)\big)=cD^nf(x)$

تمارين: احسب كلاً مما يلي:

1) $D^2(x^2)$
2) $D^2(e^{2x}+e^{4x})$
3) $D^3(5\sin x)$
4) $(D^2+D+1)e^{2x}$
5) $(D-3)(\cos 4x+\sin 4x)$
6) $\dfrac{1}{1+\frac{2}{D}-\frac{1}{D^2}}$

الحل الخاص

يمكن كتابة المعادلة $(*)$ بالصيغة $F(D)y = f(x)$ ويكون الحل الخاص بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)} . f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$

١) إذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{F(D)} . e^{bx} = \frac{1}{F(b)} . e^{bx} \quad , F(b) \neq 0$$

اما إذا كانت $F(b) = 0$ فالحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)} . e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r} . e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

حيث $g(b) \neq 0$ و $(D-b)^r = 0$.

تمارين (**تحل في المحاضرة**)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة المؤثر

1) $(D^2 - 2D + 5)y = e^{-x}$

2) $(D-1)^2(D^2+1)^2 y = e^x$

3) $(D+2)(D-1)^3 = e^x$

4) $y'' - 4y = e^{2x}$

واجب بيتي HW

1) $y'' - 2y' + y = e^x$

2) $(D^2 - 1)y = e^{-x}$

3) $y'' - 2y' - 3y = 6e^{5x}$

4) $y'' - y = a^x$