معكوس تحويل لابلاس Inverse Laplace Transform

إذا كان $\bar{f}(p) \;=\; L\{f(x)\}$ فتسمى الدالة $f(x)$ معكوس تحويل لابلاس او تحويل لابلاس العكسي ويعبر عنه بالشكل

$$f(x) \;=\; L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$

مثال

لإيجاد معكوس تحويل لابلاس

$$y(p) = \frac{3}{p^2 - 9}$$

$$f(x) \;=\; L^{-1}\{y(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{p^2-9}\right\}$$

$$\therefore\; f(x) = \sinh 3x$$

مثال

لإثبات ان

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-2)(p+4)}\right\} = \frac{1}{6}\left(e^{2x} - e^{-4x}\right)$$

باستخدام تجزئة الكسور نجد أن

$$A \;=\; \frac{1}{6} \qquad , \qquad B = \frac{-1}{6}$$

وعليه يكون

$$\left(e^{2x} - e^{-4x}\right) L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-2)(p+4)}\right\} = \frac{1}{6}$$

الخاصية الخطية لمعكوس تحويل لابلاس

ان معكوس تحويل لابلاس هو تحويل خطي أيضا كما في تحويل لابلاس أي انه اذا كانت كل من $g(x)\;, f(x)$ دوال للمتغير x و A, B ثوابت اختيارية وكانت

$$\bar{g}(p) = \; L\{g(x)\}, \bar{f}(p) = \; L\{f(x)\}$$

فأن

$$L^{-1}\{A\bar{f}(p)+B\bar{g}(p)\} = L^{-1}\{A\bar{f}(p)\}+L^{-1}\{B\bar{g}(p)\}$$
$$= AL^{-1}\{\bar{f}(p)\} + BL^{-1}\{\bar{g}(p)\}$$
$$= A\,f(x) + B\,g(x)$$

مثال

لإيجاد معكوس تحويل لابلاس للدالة $y(p) = \frac{3p+8}{p^2+16}$ نأخذ معكوس لابلاس لكلا الطرفين فنجد أن

$$L^{-1}\{y(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{3p+8}{p^2+16}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+16}\right\} + 2\,L^{-1}\left\{\frac{4}{p^2+16}\right\}$$
$$= 3\cos 4x + 2\sin 4x$$

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية باستخدام تحويل لابلاس

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس ومعكوسه وذلك عن طريق الخطوات التالية:

١) نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية.

٢) تعويض تحويل لابلاس للدوال والمشتقات الموجودة في المعادلة بما يساويه.

ملاحظة: تحويل لابلاس للدوال يؤخذ من الجدول (١) في المحاضرة (٢١) صفحة ٦٣ اما تحويل لابلاس للمشتقات فيعرف كما يلي:

$$L\{y'\} = py(p) - y(0)$$
$$L\{y''\} = p^2y(p) - py(0) - y'(0)$$
$$L\{y'''\} = p^3y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0)$$
$$L\{y^n\} = p^ny(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) \ldots y^{(n-1)}(0)$$

٣) تعويض الشروط الابتدائية المعطاة في المعادلة.

٤) جعل $y(p)$ في الطرف الأيسر والحدود التي تحتوي على p في الطرف الأيمن.

٥) أخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين فنحصل على حل المعادلة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام تحويل لابلاس ومعكوسه

$1)\ y' + 3y = 13\sin 2x \quad , y(0) = 6$

$2)\ y'' - 3y' + 2y = e^{-4x} \quad , y(0) = 1 \ , y'(0) = 5$