المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ولكنها ليست من الدرجة الأولى

في هذا النوع من المعادلات نستبدل المشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالباراميتر p فتأخذ المعادلة التفاضلية الصورة العامة

$$f(x,y,p) = 0$$

حيث الباراميتر p يكون له قوى أكبر من الواحد الصحيح.

وبعبارة أخرى تكون بالصيغة

$$p^n = a_1(x,y)p^{n-1} + a_2(x,y)p^{n-2} + a_{n-1}(x,y)p + a_n(x,y) = 0$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ وأن $n = 2,3,\dots\dots\dots$.

وتنقسم المعادلات من هذا النوع الى ثلاثة أنواع من حيث طرق حلها سوف ندرسها كما يلي:

النوع الأول: **معادلات تفاضلية قابلة للحل في p**

إذا أمكن تحليل المعادلة التفاضلية بالصورة

$$(p - Q_1(x,y))(p - Q_2(x,y))\dots\dots\dots(p - Q_n(x,y)) = 0$$

فان كل قوس بعد مساواته بالصفر يؤلف معادلة تفاضلية يمكن حلها بإحدى الطرق السابقة ولنفرض ان هذه الحلول هي

$$g_1(x,y,c) = 0 \ , g_2(x,y,c) = 0 \ , \dots , g_n(x,y,c) = 0$$

ويكون الحل العام هو حاصل ضرب هذه الحلول جميعاً.

وعليه يمكن تلخيص خطوات حل هذا النوع من المعادلات بما يلي:

١- تحليل المعادلة جبرياً الى عدة اقواس.

٢– مساواة كل قوس من الاقواس الناتجة بالصفر.

٣– نستبدل p برمز المشتقة $\frac{dy}{dx}$ فنحصل على معادلة تفاضلية يمكن حلها بإحدى الطرق السابقة.

٤– ضرب الحلول الناتجة ببعضها ومساواتها بالصفر للحصول على الحل العام للمعادلة.

تمارين عن النوع الأول (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $p^2 - 7p + 10 = 0$

2) $p^2 + px + py + xy = 0$

3) $y^2p^2 - x^2 = 0$

4) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

النوع الثاني: معادلات تفاضلية قابلة للحل في y

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية

$$F(x, y, p) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

من اجل y أي أن

$$y = f(x, p) \dots \dots \dots (2)$$

فإننا يمكن ان نحل المعادلة عن طريق الخطوات التالية:

١– إعادة ترتيب المعادلة (1) بحيث تصبح بالشكل $y = f(x, p)$ أي نكتب y بدلالة x, p

٢– نفاضل y بالنسبة لـ x. (نفاضل = نشتق).

٣– نعوض عن $p = \frac{dy}{dx}$ فتصبح المعادلة خالية من y وتكون بدلالة $\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$.

٤- نجد الحل من اجل p بدلالة x وليكن هذا الحل هو $\emptyset(x,p,c)=0$.

٥- حذف البارامتر p بين المعادلتين في النقطة ٣ ومعادلة (2) فنحصل على علاقة تحوي x,y,c وهي الحل المطلوب.

ملاحظة: قد نحصل من احدى العلاقات الناتجة على حل منفرد ويسمى الحل منفرداً إذا لم يكن ناتجاً عن اجراء عملية التكامل.

تمارين عن النوع الثاني (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام والمنفرد ان وجد للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $xp^2-2yp+ax=0$

2) $xp-y+x^{\frac{3}{2}}=0$

النوع الثالث: **معادلات تفاضلية قابلة للحل في x**

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية

$$F(x,y,p)=0\ \dots\dots\dots(1)$$

من اجل x أي أن

$$x=f(y,p)\ \dots\dots\dots(2)$$

فإننا يمكن ان نحل المعادلة عن طريق الخطوات التالية:

١- إعادة ترتيب المعادلة (1) بحيث تصبح بالشكل $x=f(y,p)$ أي نكتب x بدلالة y,p

٢- نفاضل x بالنسبة لـ y. (نفاضل = نشتق).

٣- نعوض عن $\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}$ فتصبح المعادلة خالية من x وتكون بدلالة $\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$.

٤- نجد الحل من اجل p بدلالة y وليكن هذا الحل هو $\psi(x,p,c)=0$.

٥- حذف البارامير p بين المعادلتين في النقطة ٣ ومعادلة (2) فنحصل على علاقة تحوي x, y, c وهي الحل المطلوب.

ملاحظة: قد نحصل من احدى العلاقات الناتجة على حل منفرد ويسمى الحل منفرداً اذا لم يكن ناتجاً عن اجراء عملية التكامل.

ملاحظة: في بعض الأحيان يكون من الصعب حذف البارامير p وعليه نعبر عن كل من x و y بدلالة p ويعتبر كل منهما حل للمعادلة.

تمارين عن النوع الثالث (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام والمنفرد ان وجد للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y^2p^2-3xp+y=0$

2) $x=p+\frac{1}{p}$

واجب بيتي HW

جد الحل العام والمنفرد ان وجد للمعادلات التفاضلية التالية:

معادلات قابلة للحل في p

1) $xyp^3+(x^2-2y^2)p^2-2xyp=0$

2) $\frac{dy}{dx}-\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

3) $yp^2 + (x - y)p - x = 0$

4) $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

5) $p^3 + 2xp^2 - y^2p^2 - 2xy^2p = 0$

معادلات قابلة للحل في y

6) $x + 2(xp - y) + p^2 = 0$

7) $y - 2px = \tan^{-1}(xp^2)$

8) $p^2 - py + x = 0$

9) $p^3 + p = e^y$

معادلات قابلة للحل في x

10) $x = \frac{p}{1 + p^2} + \tan^{-1} p$

11) $x - yp = ap^2$

12) $x = y + a \ln p$

13) $x = y + p^2$