

## المعادلات التفاضلية الخطية (المتجانسة وغير المتجانسة) من الرتب العليا

تكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة  $n$  بالصورة

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \dots \dots (1)$$

أو بالصورة

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots \dots (2)$$

حيث  $a_0, a_1, a_{n-1}, a_n$  ثابت و  $a_0 \neq 0$  وإذا كانت  $f(x) = 0$  فإن المعادلة التفاضلية تسمى حينها بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة.

وكمثال على ذلك فالمعادلة  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$  معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثالثة لأن الطرف الأيمن فيها يساوي صفر أما المعادلة  $y'' + 9y = x \cos x$  فهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة لأن الطرف الأيمن فيها لا يساوي صفر.

المؤثر  $D$ 

يعرف المؤثر  $D$  بأنه المشتقة الأولى بالنسبة إلى المتغير  $x$  والتي تكون بالشكل  $\frac{d}{dx}$  أي أن

$$D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

**مثال:** لو أعدنا كتابة المعادلة  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$  بدلالة المؤثر فإنها ستكون

بالشكل

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$$

**ملاحظة:** عند حل المعادلة (1) فإن الحل سيتكون من جزأين الجزء الأول هو حل المعادلة المتجانسة وهو ما يعرف بالحل العام او الدالة المتممة  $y_c$  اما الجزء الثاني فهو حل المعادلة غير المتجانسة وهو ما يعرف بالحل الخاص  $y_p$  وعليه يكون الحل بالصيغة

$$y = y_c + y_p$$

وسوف ندرس الان الحل العام او الدالة المتممة للجزء المتجانس من المعادلة (1) فنعيد كتابة المعادلة بالصيغة

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_{n-1})(D - m_n) = 0 \dots (*)$$

وهي ما تعرف بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) والجزور  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  تسمى الجذور المميزة ويمكن كتابتها بصيغة أخرى على اعتبار ان كل  $D = m$  ولتوضيح ذلك نأخذ المعادلة

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0 \Rightarrow (D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = 0$$

فالمعادلة المميزة تكتب بالشكل

$$m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$$

ويمكن حل هذه المعادلة بالطرق التي درسناها سابقا في المرحلة المتوسطة ومنها التحليل بالتجربة او الدستور او تجزئة الحدود حسب المعادلة التي لدينا وهناك طريقة أخرى تسمى طريقة التخمين سندرسها ان شاء الله في حينها.

هناك ثلاث حالات لجذور المعادلة (\*) وهي:

**أولاً:** الجذور حقيقية مختلفة أي ان  $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_{n-1} \neq m_n$  عندئذ تكون

الدالة المتممة بالشكل

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

**تمارين عن الحالة الاولى (تحل في المحاضرة)**

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1) 2y'' + 5y' - 12y$$

$$2) y'' - 4y = 0$$

$$3) (D^2 + 5D + 6)y = 0$$

$$4) (D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$$

**ثانياً:** الجذور حقيقية مكررة  $n$  من المرات فيكون الحل المتمم بالصيغة

$$y_c = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx} + \dots + c_n x^{n-1} e^{mx}$$

**تمارين عن الحالة الثانية (تحل في المحاضرة)**

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1) (D^4 - 8D^2 + 16)y = 0$$

$$2) (D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)y = 0$$

$$3) (D^2 + 4D + 4)y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$$

**ثالثاً:** الجذور مركبة (تخيلية) أي ان الجذور تكون بالصيغة  $a \mp bi$  فيكون الحل بالصورة

$$y_c = (A \cos bx + B \sin bx) e^{ax}$$

**تمارين عن الحالة الثالثة (تحل في المحاضرة)**

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1) y'' + 4y = 0$$

$$2) y'' + 16y = 0$$

$$3) y'' + y' + y = 0$$

## واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل العام (الدالة المتممة) للمعادلات التفاضلية التالية:

١- الجذور حقيقية مختلفة وغير مكررة

1)  $9y'' + 18y' - 16y = 0$

2)  $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

3)  $(D^2 - 2D - 3)y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 0$

4)  $(D^3 - 4D)y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$

٢- الجذور حقيقية متساوية ومكررة

5)  $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$

6)  $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$

7)  $(D^3 + D^2 - D - 1)y = 0$

8)  $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$

9)  $(D^3 - 3D - 2)y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 9, y''(0) = 0$

10)  $(D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = -6, y'''(0) = 14$

٣- الجذور خيالية (مركبة) (غير حقيقية)

11)  $y^{(4)} + a^4y = 0$

12)  $y'' + 8y' + 25y = 0$

13)  $(D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4)y = 0$