الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (طريقة المعاملات غير المحددة)

تكون المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \dots\dots (1)$$

أو بالصورة

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots\dots (2)$$

حيث a_0, a_1, a_{n-1}, a_n ثوابت و $a_0 \neq 0$. تناولنا في المحاضرة السابقة كيفية إيجاد الحل المتمم y_c للجزء المتجانس من المعادلة (1) أي عندما تكون الدالة $f(x) = 0$ وسنتناول الان كيفية إيجاد الحل الخاص y_p للجزء غير المتجانس من المعادلة (1) أي إذا كانت الدالة $f(x) \neq 0$.

هناك عدة طرق لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة وسندرس في هذه المحاضرة أولى هذه الطرق وهي طريقة المعاملات غير المحددة والتي تعتمد بشكل أساسي على نوعية الدالة $f(x)$ الموجودة في المعادلة التفاضلية فهنالك العديد من الحالات التي يمكن ان تأتي بها الدالة $f(x)$ وهي:

<u>الحالة الاولى</u>

إذا كانت $f(x)$ متعددة حدود أي أن

$$f(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + c_k x^k + \cdots$$

طريقة الحل:

أ- نفرض ان الحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = a x^n + b x^{n-1} + c x^k$$

<u>وتكون الفرضية حسب درجة متعددة الحدود</u> وكما سيتضح من خلال حل الأمثلة فيما بعد.

ب- بعد الفرضية نشتق حسب رتبة المعادلة المعطاة ونعوض في المعادلة الاصلية.

ت- نساوي معاملات قوى x الموجودة في الطرفين الأيمن والأيسر لإيجاد قيم الثوابت $a, b, c, \dots \dots \dots$ ثم نعوض هذه الثوابت في الفرضية الموجودة في النقطة (أ) وبذلك نكون قد أكملنا إيجاد الحل الخاص.

تمارين عن الحالة الأولى (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية بطريقة المعاملات غير المحددة:

1) $y'' + y' = x^2 + 2x$

2) $y^{(4)} + y'' + y' + y = x^3 + 2x + 1$

الحالة الثانية

إذا كانت $f(x) = be^{ax}$ وهناك عدة حالات لفرض الحل الخاص وحسب النقاط التالية:

أ- إذا لم يكن a أحد جذور المعادلة المميزة نفرض أن $y = Ae^{ax}$.

ب- إذا كان a أحد جذور المعادلة المميزة نفرض أن $y = Axe^{ax}$.

ت- إذا كان a أحد جذور المعادلة المميزة ومكرر n من المرات نفرض أن $y = Ax^n e^{ax}$

تمارين عن الحالة الثانية (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية بطريقة المعاملات غير المحددة:

1) $y'' + 3y' + 2y = 3e^x$

2) $y'' - 2y' + y = e^x$

3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$

الحالة الثالثة

إذا كانت $f(x) = b \sin ax$ أو $f(x) = b \cos ax$ وتكون الفرضية حسب الاتي

أ- إذا لم تكن $m = ai$ أحد جذور المعادلة المميزة نفرض ان

$$y = A\cos ax + B\sin ax$$

ب- إذا كانت $m = ai$ أحد جذور المعادلة المميزة (يوجد جذر تخيلي) نفرض أن

$$y = x(A\cos ax + B\sin ax)$$

ت- إذا كانت $m = ai$ أحد جذور المعادلة المميزة ومكرر n من المرات نفرض أن

$$y = x^n(A\cos ax + B\sin ax)$$

تمارين عن الحالة الثالثة (تحل في المحاضرة)

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية بطريقة المعاملات غير المحددة:

1) $y^{(4)} - 2y'' + y = \sin x$

2) $y'' + y = 2\cos x\,, y(0) = 1, y'(0) = 0$

ملاحظة: قد تكون الدالة $f(x)$ مكونة من حاصل جمع الدوال المذكورة في النقاط أعلاه مثل

$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 4e^{2x} - \cos 3x$ فعند إيجاد الحل الخاص نجد الحل لكل دالة على حدة ثم نجمع هذه الحلول لنحصل على الحل النهائي.

تمرين عن الملاحظة أعلاه: جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$y'' - y' - 2y = e^{-x} + x + \sin x$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية التالية بطريقة المعاملات غير المحددة:

الحالة الأولى

1) $y'' + y' + y = x^2 + 1$

2) $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x^2$

3) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$

4) $y''' + 4y' = x$

الحالة الثانية

5) $y''' - 4y' = e^{-2x}$

6) $y''' - y'' + y' + y = e^{-x}$

الحالة الثالثة

7) $y^{(4)} + 4y'' = \sin 2x$

8) $y''' - y' = 2\cos x$

9) $y'' + 4y = \sin x \,, y(0) = 2, y'(0) = -1$

10) $y'' - y' - 2y = \cos x - \sin 2x \,, y(0) = \frac{-7}{20}, y'(0) = \frac{1}{5}$