الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة طريقة تغيير الثوابت

لقد درسنا في المحاضرة الثانية كيفية معرفة استقلال وارتباط الحلول خطياً وذلك عن طريق محدد فرونسكي وفي طريقة تغيير الثوابت سيكون محدد فرونسكي ذو دور أساسي في إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة لذلك سندرج في أدناه مراجعة سريعة لما درسناه في المحاضرة الثانية مع ملاحظة أننا سنستفيد من قيمة محدد فرونسكي فقط وليس هناك داع لمعرفة فيما إذا كانت الحلول مرتبطة أم مستقلة خطياً.

محدد فرونسكي

لتكن لدينا الدالتين $y_1(x), y_2(x)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة الى x فاننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

فاذا كان محدد فرونسكي مساوياً للصفر قلنا بأن الحلول مرتبطة خطياً اما إذا كان غير مساوي للصفر فأن الحلول تكون مستقلة خطياً. وإذا كان لدينا ثلاث دوال فأن محدد فرونسكي يكون بالشكل

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

ويتم إيجاد المحدد اعلاه كما درسنا في الجبر الخطي.

لحل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بطريقة تغيير الثوابت نفرض ان

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية وان $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ هو الحل العام (الدالة المتممة) للجزء المتجانس لهذه المعادلة. فأن الحل الخاص للجزء غير المتجانس للمعادلة التفاضلية يعطى بالعلاقة التالية

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

حيث

$$v_1 = -\int \frac{f(x)y_2}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$v_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx$$

وان y_1, y_2 هما الحلان اللذان نجدهما من خلال الدالة المتممة و $W(y_1,y_2)$ هو محدد فرونسكي لهذين الحلين ويتم ايجاده باستخدام القانون $W(y_1,y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$.

تنويه: كل طالب لا يتقن طرق التكامل جيداً سيلقى صعوبات كبيرة في هذه الطريقة لأنها تعتمد بشكل كلي على مهارات الطالب في إيجاد التكامل وقد أعذر من أنذر .

تمارين (تحل في المحاضرة)

جد الحل العام $y_c + y_p$ للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة تغيير الثوابت

1) $y'' + y = \sec x$

2) $y'' + y = \csc x$

3) $y'' - 2y' + y = xe^x \ln x$

4) $y'' + y = \tan x$

5) $y'' + y' = \ln|x|$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل العام $y_c + y_p$ للمعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة تغيير الثوابت

1) $y'' + y' = -\ln|x|$

2) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

3) $y'' = x^2$

4) $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$

5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{2e^{x}}{x}$

6) $y'' + 4y = \tan 2x$

7) $y'' + 4y = \tan 2x + e^{3x}$

8) $y'' + 2y' + y = e^{x} \ln x$

9) $y'' + 2y' + 5y = e^{x} \sec x$

10) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + e^{x}$