الارتباط والاستقلال خطيا LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

لمعرفة ما إذا كانت حلول المعادلة التفاضلية مرتبطة أو مستقلة خطياً يجب إيجاد محدد فرونسكي والذي يعرف بالشكل الاتي:

محدد فرونسكي

لتكن لدينا الدالتين $y_1(x), y_2(x)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة الى x فاننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

فاذا كان محدد فرونسكي مساوياً للصفر قلنا بأن الحلول مرتبطة خطياً اما إذا كان غير مساوي للصفر فأن الحلول تكون مستقلة خطياً. وإذا كان لدينا ثلاث دوال فأن محدد فرونسكي يكون بالشكل

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

ويتم إيجاد المحدد اعلاه كما درسنا في الجبر الخطي.

مثال: هل أن الحلول $y_1=x^2, y_2=\sin 6x$ مرتبطة أم مستقلة خطياً؟

الحل:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

$$W(x^2,\sin 6x)=\begin{vmatrix} x^2 & \sin 6x \\ 2x & 6\cos 6x \end{vmatrix}=6x^2\cos 6x-2x\sin 6x\neq 0$$

اذن الحلول مستقلة خطياً.

تمارين (تحل في المحاضرة)

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = e^x \sin x, y_2 = e^x \cos x$

2) $y_1 = e^x, y_2 = e^x, y_3 = e^{-2x}$

3) $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$

4) $y_1 = \ln x, y_2 = -\ln x^2, y_3 = \ln x^3$

5) $y_1 = \cos(\ln x^2), y_2 = \sin(\ln x^2)$

6) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = e^{-2x}$

واجب بيتي HOMEWORK

بين فيما إذا كانت الدوال الاتية مستقلة أم مرتبطة خطياً

1) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$

2) $y_1 = x^2, y_2 = x^2 \ln x$

3) $y_1 = 3e^{2x}, y_2 = 5e^{2x}$

4) $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{-2x}$

5) $y_1 = 1 + x, y_2 = 1 + 2x, y_3 = x^2$

6) $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin 2x$

مسائل القيم الابتدائية والحدودية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية الاعتيادية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية، وهذه الشروط هي التي تمكننا من إيجاد قيم الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام.

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثانية مثلاً يحتوي على ثابتين اختياريين، لذا يلزم وجود شرطين إضافيين للمعادلة لإيجاد قيمة كل من الثابتين وهذان الشرطان يأخذان صوراً مختلفة ومنها:

١- اذا اعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0 مثل

$$y(x_0) = a \quad , y'(x_0) = b$$

فان تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_0 ونسمي المعادلة التفاضلية مع هذه الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem**.

٢- إذا اعطي الشرطان عند نقطتين مختلفتين مثل

$$y(x_1) = y_1 \quad , y(x_2) = y_2$$

كانت الشروط شروطاً حدودية وسميت المعادلة التفاضلية مع هذه الشروط مسألة القيمة الحدودية **Boundary Value Problems**.

سنتناول في محاضرتنا هذه مسألة القيم الابتدائية التي تكون مؤلفة من:

١) معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالشكل $y' = f(x,y)$.

٢) شرط ابتدائي من الصيغة $y(a) = b$.

بصورة عامة، نتوقع ان كل مسألة قيمة ابتدائية لها بالضبط حل واحد. يمكن إيجاد هذا الحل باستخدام الاجراء الاتي:

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = b$$

نستطيع حلها عن طريق الخطوات التالية:

١) إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية والذي سيحتوي على ثابت اختياري c.

٢) نعوض $x = a$ و $y = b$ لنحصل على معادلة في c.

٣) نحل من اجل c ثم نعوض الجواب في الصيغة التي حصلنا عليها في الخطوة ١.

<u>**ملاحظة:**</u> قد تحتوي مسألة القيمة الابتدائية على أكثر من شرط وذلك لاعتماد وجود الشروط على رتبة المعادلة التفاضلية فالمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى لها شرط واحد والمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لها شرطان وهكذا تباعاً وهذا ما سيتم ايضاحه من خلال حل الأمثلة.

مثال: أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' = x \qquad , y(0) = 1 \qquad , y'(0) = -1$$

الحل:

بتكامل المعادلة مرتين نجد أن

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

والذي يمثل الحل العام للمعادلة أعلاه.

باشتقاق الحل العام مرة واحدة

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

الان بتعويض الشروط الابتدائية

$$y'(0) = -1 \Longrightarrow c_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1$$

ويكون حل المسألة المعطاة هو $y = \frac{1}{6}x^3 - x + 1$.

مثال: أوجد حل مسألة القيمة الحدودية

$$y'' = 6x + 2 \qquad , y(0) = 2 \qquad , y(2) = 8$$

الحل:

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة الى x مرتين نحصل على

$$y = x^3 + x^2 + ax + b$$

الان بتعويض الشروط الحدودية نحصل على

$$y(0) = 2 \Longrightarrow b = 2$$

$$y(2) = 8 \Longrightarrow a = -3$$

والحل هو

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

تمارين (**تحل في المحاضرة**)

جد الحل لمسائل القيم الابتدائية والحدودية التالية:

$1)\ y' = 10 - x \qquad , y(0) = -1$

$2)\ y' = 9x^2 - 4x + 5 \qquad , y(-1) = 0$

$3)\ y' = \cos x + \sin x \qquad , y(\pi) = 1$

$4)\ y'' = 2 - 6x \qquad , y'(0) = 4 \quad , y(0) = 1$

واجب بيتي HOMEWORK

جد الحل لمسائل القيم الابتدائية والحدودية التالية:

$1)\ y' = -y^2 \qquad , y(0) = 5$

$2)\ y' = 2y \qquad , y(0) = 5$

$3)\ y' = xe^x \qquad , y(0) = 3$

$4)\ y' = 3y \qquad , y(2) = 4$

$5)\ y^{(4)} = -\sin x + \cos x \quad , y'''(0) = 7 \quad , y''(0) = y'(0) = -1, y(0) = 0$

مبرهنة الوجود والوحدانية لحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية (**للاطلاع فقط**)

نفرض المعادلة التفاضلية

$y' = f(x, y) \ldots \ldots \ldots (1)$

ونفرض الشرط الابتدائي

$y(x_0) = y_0 \ldots \ldots \ldots (2)$

واذا كانت الدالة $f(x, y)$ معرفة في المنطقة المغلقة R بالشكل

$$R: |x - x_0| \le a \qquad , |y - y_0| \le b$$

حيث a, b ثابتان ، تحقق:

١- الدالة $f(x,y)$ مستمرة ومقيدة أي اذا وجد عدد موجب M فان

$$|f(x,y| \leq M$$

٢- الدالة $f(x,y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة الى y ومقيدة أي أن $K \geq \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$ حيث K عدد موجب.

فان المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائي (2) في المنطقة $|x - x_0| \leq h$ حيث $h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

ملاحظة: الشرط $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$ يسمى **شرط ليبشتز Lipschitz Condition** والثابت K يسمى **ثابت ليبشتز Lipschitz Constant**.