المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلة القابلة لفصل المتغيرات Separable Equations

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

وهذه الدالة يجب أن تكون مستمرة بالنسبة للمتغير x.

وتكون على عدة حالات:

١) اذا كانت هذه المعادلة تابعة لــ x فقط:

$$y' = f(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow dy = f(x)\cdot dx$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$y = \int f(x)\cdot dx + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

٢) اذا كانت المعادلة تابعة لــ y فقط:

$$y' = f(y) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Longrightarrow dy = f(y)\cdot dx \Longrightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة.

٣) اذا كانت المعادلة التفاضلية تابعة لــ x و y قابلة لفصل المتغيرات تكتب بالشكل التالي:

$$y' = f(x,y) \Longrightarrow f_1(x)\cdot g_1(y)\cdot dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\cdot dy = 0$$

حيث f_1, f_2, g_1, g_2 دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة لــ x و y على أي مجال مغلق من $\mathbb{R}$.

نقسّم طرفي المعادلة على المقدار: $f_2(x)\cdot g_1(y) \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام لها بفصل المتغيرات.

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \qquad (*)$$

تسمى بالمعادلة التي تنفصل متغيراتها أو قابلة لفصل المتغيرات.

مثال ١

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\,dx \Longrightarrow \ln|y| = x^3 + c \Longrightarrow y = e^{x^3+c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

مثال ٢

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$.

الحل:

نقوم بفصل المتغيرات بقسمة المعادلة التفاضلية على المقدار $(1-x)(1+y)$ فنحصل على

$$\int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dx}{1-x} = 0 \Longrightarrow \ln(1+y) + \ln(1-x) = c$$

وبأخذ e الطرفين ينتج

$$(1+y)(1-x) = e^c = c_1$$

وهو الحل العام للمعادلة.

ملحوظة:

عندما يكون هناك متغيرات لوغاريتمية نضع ثابت التكامل كمتغير لوغاريتمي أو إذا كانت أسية نضعه بشكل أسي وهكذا ...

ملاحظة هامة:

يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متغيراتها مباشرة ولكنها تؤول الى معادلات تفاضلية قابلة للفصل فمثلاً ان المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \dots (*) \; ; a, b, c \text{ ثوابت}$$

هي معادلة تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها مباشرة ولذلك نجري عليها التحويل الاتي:

أولاً نفرض:

$$z = ax + by + c$$

ثم نفاضل الطرفين:

$$\Longrightarrow dz = a \cdot dx + b \cdot dy$$

نقسم الطرفين على dx:

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة $(*)$ فيكون:

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب:

$$dx = \frac{dz}{b \cdot f(z) + a}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو:

$$x = \int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} + c$$

وبالمثال يتضح المقال..

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = x + y + 1$$

الحل:

نكتب المعادلة بالشكل: $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$

نلاحظ أنها غير قابلة لفصل المتغيرات مباشرة لذلك نفرض: $z = x + y + 1$

ثم نفاضل الطرفين: $\Rightarrow dz = dx + dy$

نقسم الطرفين على dx: $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الأساسية فيكون $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z$

و هذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب:

$$dx = \frac{dz}{1 + z}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x = \ln|1 + z| + \ln c = \ln|x + y + 2| + \ln c \Rightarrow y = \frac{e^x}{c} - x - 2$$

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $e^y(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - 2x(1 + e^y) = 0$

2) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$

3) $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$

4) $(2y + xy)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

5) $e^x\frac{dy}{dx} = 2(x+1)y^2, \qquad y(0) = \frac{1}{6}$

6) $2y\frac{dy}{dx} = e^{x-y^2}, \qquad y(4) = 2$

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\ln x + 1)}{\sin y + y\cos y}$

8) $\frac{dy}{dx} = e^{3x-2y} + x^2e^{-2y}$

9) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

10) $\frac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2, \qquad y(0) = 1$

11) $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2+y^2-1}{2(x^2+y^2)+1} = 0$

12) $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{1+x^2} = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y\left(\sqrt{1-x^2}\right)dy + x\left(\sqrt{1-y^2}\right)dx = 0$

2) $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

3) $sec^2x \tan y\, dx + sec^2y \tan x\, dy = 0$

4) $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)}$

5) $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x)sec^2y dy = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}, \qquad y(0) = 0$

7) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y} + 4x^2e^{-3y}$

8) $xy\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}(1+x+x^2)$

9) $\ln\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$

10) $x \cos x \cos y + \sin y \frac{dy}{dx} = 0$

11) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

12) $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x}e^{1/y} dy = 0$

13) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln x}{x}$

14) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y x}{e^y + x^2 e^y}$

15) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy - x + y}{xy - y^2}$

16) $\frac{dy}{dx} = (4x + y)^2$

17) $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2, a \text{ is constant}$

18) $\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$

19) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$