ثانياً: **المعادلات المتجانسة Homogeneous Equations**

تعريف: **الدالة المتجانسة Homogeneous Function**

نقول عن الدالة $f(x,y)$ التابعة للمتغيرين x و y بأنها متجانسة من الدرجة n اذا تحققت العلاقة

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

حيث: $t\neq 0$ عدد حقيقي

اذا كانت: $n=0$ نقول ان درجة التجانس من الدرجة صفر أو متجانسة بشكل عام.

أي يمكن اخراج t عامل مشترك بعد تبديل كل من (x,y) بـ (tx,ty) وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y)=x^3+y^3$ متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$f(tx,ty)=(tx)^3+(ty)^3=t^3(x^3+y^3)=t^3 f(x,y)$$

بينما الدالة $f(x,y)=x^3+y^3+1$ غير متجانسة وذلك **لأنها تحتوي على حد مطلق.**

تمرين

هل الدوال التالية متجانسة أم لا؟

1) $f(x,y)=x^2+xy+y^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$

2) $f(x,y)=xy^2+y$

تعريف: **المعادلة المتجانسة**

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي على الصورة

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

بأنها متجانسة اذا كانت كلاً من M,N دالة متجانسة ومن نفس الدرجة.

خطوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

١- نضع $y=vx$.

٢- نشتق (١) بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$.

٣- نضرب المعادلة $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ بالمقدار dx فنحصل على $dy=vdx+xdv$.

٤- نعوض قيمتي y,dy في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابلة لفصل المتغيرات والتي من السهل استنتاج الحل لها.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

الحل:

بوضع $y = vx$ وباشتقاقها بالنسبة الى x نحصل على

$$dy = vdx + xdv$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2dx + v^2x^2dx - 2v^2x^2dx - 2vx^3dv = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة والبحث عن العوامل المشتركة ينتج

$$\Longrightarrow x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3dv = 0$$

بالقسمة على المقدار $(1 - v^2)x^3$ نحصل على

$$\frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0 \Longrightarrow \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$$

$$\Longrightarrow \ln x(1 - v^2) = \ln c \Longrightarrow x(1 - v^2) = c$$

وبإرجاع قيمة v لما يساويها وتعويضها أعلاه نجد أن

$$x - \frac{xy^2}{x^2} = c \Longrightarrow x^2 - y^2 = cx$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

ملاحظة: يستحسن دوماً ترتيب الحل العام (نعزل y) حتى نكتبه بالشكل $y = F(x) + c$ ، وذلك ان أمكن.

ملاحظة: في بعض الأسئلة يمكن أن نستخدم الفرضية $x = vy$ اذا ظهرت لنا المشتقة بالشكل $\frac{dx}{dy}$.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$

2) $\left(x + y\cot\frac{x}{y}\right)dy - ydx = 0$

3) $\left(x\tan\frac{y}{x} - ysec^2\frac{y}{x}\right)dx + xsec^2\frac{y}{x}dy = 0$

4) $x\frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x + 1)$

5) $(x^2 - y^2)dx - xydy = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$

2) $(xy - x^2)\frac{dy}{dx} = y^2$

3) $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

4) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}, \qquad y(4) = 3$

5) $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$

6) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$