المعادلات التفاضلية التي تؤول الى معادلات متجانسة

تكون هذه المعادلات بالشكل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 ثوابت.

ولغرض حل المعادلة التفاضلية أعلاه هناك حالتين تعتمدان على المستقيمين المذكورين في المعادلتين التاليتين:

$$a_1x+b_1y+c_1=0\qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0\qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

الحالة الأولى:

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}}$$

فيكون المستقيمان متقاطعان عندئذ نفرض أن نقطة التقاطع هي (h,k) ونستخدم التعويض

$$\boldsymbol{x=x_1+h\Rightarrow dx=dx_1}$$

$$\boldsymbol{y=y_1+k\Rightarrow dy=dy_1}$$

ثم نعوض العلاقتين أعلاه في المعادلة الاصلية (1) فتتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة متجانسة ونستخدم الطريقة التي درسناها في المحاضرة السابقة.

الحالة الثانية:

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}}$$

فيكون المستقيمان متوازيان عندئذ نستخدم احدى العلاقتين التاليتين في الحل و هما

$$\boldsymbol{z=a_1x+b_1y\Rightarrow dz=a_1dx+b_1dy}$$

$$\boldsymbol{z=a_2x+b_2y\Rightarrow dz=a_2dx+b_2dy}$$

وبعد التعويض في المعادلة الاصلية نحصل على معادلة قابلة لفصل المتغيرات لذا سيكون من السهولة الحصول على الحل العام لها.

ملاحظة: قد يكون المستقيمان منطبقين أي أن $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \varphi$ فالحل يكون بالشكل

$$y' = f(\varphi) \xRightarrow{\text{الطرفين بالوسطين}} dy = f(\varphi)dx \xRightarrow{\text{تكامل}} y = F(\varphi)x + c$$

ملاحظة: قد تأتي المعادلة (1) بالصيغة

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

وتستخدم نفس الحالات أعلاه لإيجاد الحل.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $(x + y + 1)dx - (2x + 2y + 2)dy = 0$

2) $(x - y + 1)dx - (x - y + 2)dy = 0$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 5}{x + y + 1}$

5) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

6) $(x - y + 1)^2 y' = (x - y - 2)^2$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x - 2}{y - x - 4}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 4}{4x + 6y + 5}$

3) $(x - y - 2)dx + (x - 2y - 3)dy = 0$

4) $(2x + y - 3)dy = (x + 2y - 3)dx$

5) $(2x + 5y + 1)dx - (5x + 2y - 1)dy = 0$