معادلة برنولي Bernoulli Equation

المعادلة التفاضلية بالصيغة

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^{n} \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث n أي عدد حقيقي تسمى **معادلة برنولي**.

لاحظ انه اذا كانت $n=0$ أو $n=1$ فأن المعادلة (1) معادلة تفاضلية خطية لذا يجب ان تكون $n\neq 1$ لكي تكون المعادلة غير خطية ويمكن أن تكون $n=\frac{1}{2}$ بما أن قيمة n حقيقية ، **ولإيجاد الحل لمعادلة برنولي نتبع الخطوات التالية:**

١- نقسم حدود المعادلة على y^{n} فتصبح المعادلة بالشكل

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x)$$

$$\Longrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x)\ldots\ldots\ldots(2)$$

٢- نغير المتغير المعتمد من y الى z حيث $z=y^{1-n}$.

٣- نشتق بالنسبة الى x فنحصل على

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}=y^{-n}\frac{dy}{dx}\ldots\ldots\ldots(3)$$

٤- نعوض المعادلة (3) والمقدار $z=y^{1-n}$ في المعادلة (2) فنحصل على

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=f(x)$$

والمعادلة الناتجة أعلاه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها بإيجاد عامل التكامل كما درسنا في المحاضرة السادسة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ x\frac{dy}{dx} - y = xy^4$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3y^3$$

$$3)\ x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^6$$

$$4)\ xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$5)\ \frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3cos^2y$$

$$6)\ \frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x}\right)\ln y = \frac{y}{x}(\ln y)^2$$

$$7)\ x\frac{dy}{dx} + y = y^2\ln x$$

$$8)\ \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}\ln x$$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = y\tan x - y^2\sec x$$

$$2)\ 2x\frac{dy}{dx} = 10x^3y^5 + y$$

$$3)\ (x^3y^2 + xy)dx = dy$$

$$4)\ \frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1 + x} = (1 + x)e^x\sec y$$

$$5)\ x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2$$

$$6)\ \frac{dy}{dx} = x^3y^2 + xy$$

7) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\ln y=ye^{x}$

8) $\frac{dy}{dx}-2xy=2xy^{2}$

9) $\frac{dx}{dy}-xy=x^{2}y^{3}$

10) $\frac{dy}{dx}-xy=x^{3}y^{2}$