المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

قبل أن نعرف ما هي المعادلة التفاضلية التامة يجب ان نعرف ما هو التفاضل التام لدالة وذلك عن طريق التعريف الاتي:

تعريف: **التفاضل التام Total Differential**

اذا كانت لدينا الدالة $f(x,y)$ دالة في متغيرين x,y فالعلاقة

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

تسمى التفاضل التام للدالة $f(x,y)$.

واذا ساوى الطرف الأيمن للمعادلة (1) صفراً فان $f(x,y)=c$ حيث c ثابت اختياري.

تنويه

يسمى المقدارين $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ المشتقتان الجزيئيتان للدالة f بالنسبة الى x,y على التوالي فاذا اشتققنا الدالة جزئياً بالنسبة الى x فاننا نعتبر y ثابتاً واذا اشتققنا الدالة جزئياً بالنسبة الى y فاننا نعتبر x ثابتاً و هكذا دواليك بالنسبة لبقية المتغيرات.

مثال: أوجد كلاً من $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ للدالة $f(x,y)=1+e^xy^2+xe^xy$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^xy^2+xe^xy+e^xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2e^xy+xe^x$$

مبرهنة: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالصيغة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

فنقول عن المعادلة التفاضلية بأنها تامة **Exact** إذا تحقق الشرط الاتي

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

طريقة الحل

بعد التأكد من أن المعادلة التفاضلية معادلة تامة نتبع الخطوات التالية:

١) نجد الدالة $f(x,y)$ من خلال العلاقة

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx \dots \dots \dots (*)$$

٢) نجد الدالة $g(x,y)$ من خلال العلاقة

$$g(x,y) = \int N(x,y)dy \dots \dots \dots (**)$$

٣) نجد الحل العام للمعادلة من خلال العلاقة

$$f(x,y) + g(x,y) = c$$

مع ملاحظة عدم تكرار الحدود المتشابهة الناتجة من العلاقتين $(*), (**)$.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$

الحل:

بإلقاء نظرة سريعة على المعادلة نجد أن

$$M(x,y) = x^2y^3 \quad , N(x,y) = x^3y^2$$

نجد كلاً من $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2$$

نلاحظ أن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ لذا فان المعادلة تامة ، الان نجد الحل العام لها

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int x^2y^3dx = \frac{x^3y^3}{3}$$

$$g(x,y) = \int N(x,y)dy = \int x^3y^2dy = \frac{x^3y^3}{3}$$

والحل العام هو

$$f(x,y) + g(x,y) = c \Longrightarrow \frac{x^3y^3}{3} = c$$

مع ملاحظة اننا التزمنا بعدم تكرار الحدود المتشابهة.

<u>تمارين (تحل في المحاضرة)</u>

أولاً: بيّن ان المعادلات التفاضلية التالية تامة ثم جد الحل العام لها

1) $\left(y^2e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$

2) $\left(y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right)dx + (x + \ln x - x\sin y)dy = 0$

3) $(1 + 2xy\cos x^2 - 2xy)dx + (\sin x^2 - x^2)dy = 0$

4) $\frac{dy}{dx} + \frac{y\cos x + \sin y + y}{\sin x + x\cos y + x} = 0$

5) $(x^2 - ay)dx = (ax - y^2)dy$

6) $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$

7) $ye^{xy}dx + (xe^{xy} + 2y)dy = 0$

ثانياً: جد قيمة k التي تجعل المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم جد حلها

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

ثالثاً: جد قيمة الدالة $N(x,y)$ التي تجعل المعادلة التفاضلية التالية تامة

$$\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x,y)dy=0$$

واجب بيتي HOMEWORK

بيّن ان المعادلات التفاضلية التالية تامة ثم جد الحل العام لها

1) $(2x^2+3y^2-7)xdx-(3x^2+2y^2-8)ydy=0$

2) $(x^4-2xy^2+y^4)dx-(2x^2y-4xy^3+\sin y)dy=0$

3) $(5x^4+3x^2y^2-2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-5y^4)dy=0$

4) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

5) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

6) $y\sin 2x\,dx-(1+y^2+cos^2x)dy=0$

7) $(\sec x\tan x\tan y-e^x)dx+\sec x\,sec^2y dy=0$

8) $(2xy+y-\tan y)dx+(x^2-xtan^2y+sec^2y)dy=0$