المعادلات التفاضلية التي تؤول الى معادلات تامة

عامل التكامل Integrating Factor

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

غير تامة أي أن $\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$ فلحل هذه المعادلة لا بد من إيجاد عامل مكامل μ لتحويلها الى معادلة تفاضلية تامة وهناك عدة حالات لإيجاد هذا العامل وسوف ندرسها تباعا وبالتفصيل ، اضف الى ذلك فان هناك عوامل مكاملة لا تعتمد على الحالات التي سندرسها وانما تعتمد على مهارة الطالب في الحل.

نستعرض الان الحالات التي من الممكن إيجاد عامل التكامل عن طريقها:

الحالة الأولى

للمعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ إذا كان

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$$

فان عامل التكامل يكون دالة في x فقط ويعطى بالعلاقة

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

الحالة الثانية

للمعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ إذا كان

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \emptyset(y)$$

فان عامل التكامل يكون دالة في y فقط ويعطى بالعلاقة

$$\mu = e^{-\int \emptyset(y)dy}$$

الحالة الثالثة

اذا كان $Mx + Ny \neq 0$ وكانت المعادلة متجانسة فأن عامل التكامل هو

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

الحالة الرابعة

اذا كان $Mx - Ny \neq 0$ وكان بالإمكان كتابة المعادلة بالصيغة

$$yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$$

فأن عامل التكامل هو

$$\frac{1}{Mx - Ny}$$

الحالة الخامسة

اذا امكن كتابة المعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ بالشكل

$$x^a x^b(mydx + nxdy) + x^c y^d(pydx + qxdy) = 0$$

حيث a,b,c,d,m,n,p,q كلها ثوابت فأن المعادلة لها عامل التكامل $x^h y^k$ عندما نختار h,k وبعدها نضرب المعادلة بـ $x^h y^k$ فتصبح المعادلة تامة. ويتم إيجاد عامل التكامل $x^h y^k$ عن طريق المعادلات التالية:

$$\frac{a+h+1}{m} = \frac{b+k+1}{n} \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{c+h+1}{p} = \frac{d+k+1}{q} \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

بعد تعويض قيم a,b,c,d,m,n,p,q في المعادلتين (1) و (2) نحصل على معادلتين انيتين نحلهما جبرياً لإيجاد قيم كل من h و k ثم نعوض القيمتين في المقدار $x^h y^k$ وهو عامل التكامل للمعادلة المراد حلها.

ملاحظة: بعد إيجاد عامل التكامل نضرب المعادلة بعامل التكامل فتصبح المعادلة تامة أي أن الشرط $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ يتحقق ، ونكمل الحل حسب ما تمت دراسته في المحاضرة السابقة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

حول المعادلات التفاضلية التالية الى معادلات تامة ثم جد الحل العام لها

1) $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx - x^2ydy = 0$

2) $(xy^3 + y)dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0$

3) $(1 + xy)ydx + (1 - xy)xdy = 0$

4) $(y\ln y)dx + (x - \ln y)dy = 0$

5) $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$

6) $y(xy + 2x^3y^3)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

حول المعادلات التفاضلية التالية الى معادلات تامة ثم جد الحل العام لها

1) $(x^3y^2 + x)dy + (x^2y^3 - y)dx = 0$

2) $(x^2y^2 + xy + 1)ydx + (x^2y^2 - xy + 1)xdy = 0$

3) $(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$

4) $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$

5) $x^4\dfrac{dy}{dx} + x^3y + \csc(xy) = 0$

6) $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$

7) $2ydx + x(2\ln x - y)dy = 0$