

حيث ان  $x$  يمثل بعد موضع استقرار الذرة المهتزة عن نقطة الاصل لذلك يمكن التعبير عن ازاحة الذرة  $u$  عن موضع استقرارها بالعلاقة الاتية :

$$u_n = Ae^{i(kna-\omega t)}$$

على اساس ان بعد موضع استقرارها عن نقطة الاصل  $(x = na)$

اشتقاق الازاحة بالنسبة الى الزمن مرتين نحصل على تعجيل الذرة او البلورة

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{i(kna-\omega t)} = -\omega^2 u_n \quad (2)$$

وهذا معناه ان اتجاه التعجيل او اتجاه القوة المسببة للتعجيل يكون معاكس لاتجاه الازاحة.

$$F_n = -mu_n \quad (3)$$

نفترض ان قانون هوك يمكن تطبيقه :

$$F_n = c (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (4)$$

حيث ان  $c$  هو ثابت التناسب في قانون هوك . نقوم الان بمساواة معادلة (3) مع (4):

$$-mu_n = c (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (5)$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \left( 2 - \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n-1}}{u_n} \right) \quad (6)$$

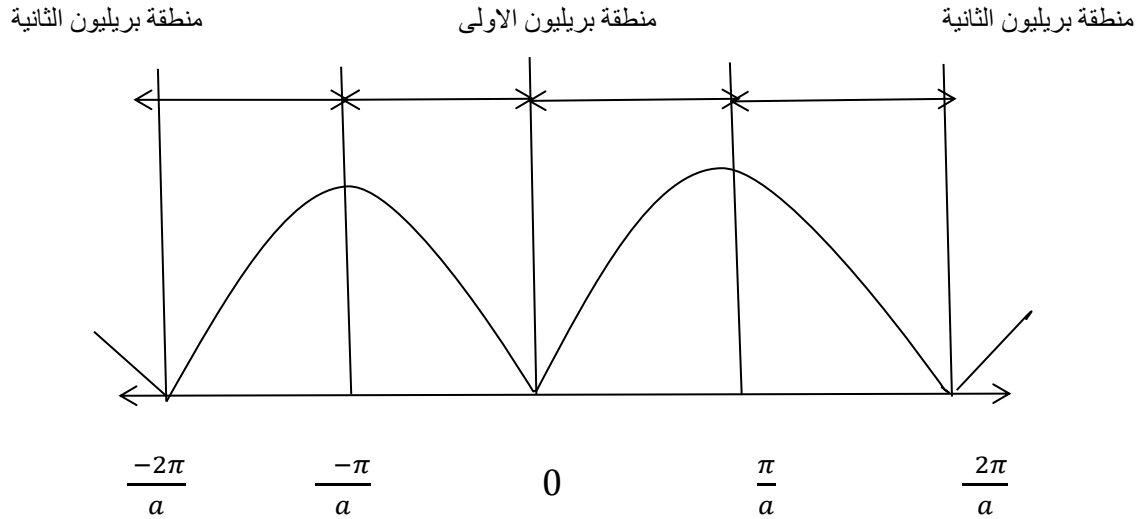
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{Ae^{i(k(n+1)a-\omega t)}}{Ae^{i(kna-\omega t)}} = e^{ika}$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} (2 - e^{ika} - e^{-ika}) = 2\frac{c}{m} (1 - \cos ka)$$

$$\omega^2 = 4\frac{c}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{ka}{2}$$

علاقة التفريق بين التردد الزاوي  $\omega$  ومتجه الموجة  $K$



والشكل اعلاه يوضح الاشارة الموجبة والسالبة حيث يتعين لنا اتجاه انتقال الموجة اذا كان نحو اليمين او اليسار.

اهم خصائص التفريق الكهربائي :

1. وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي عندما  $k = \pm \frac{\pi}{a}$  او مضاعفاتها الفردية . فهذا يعني ان هناك حدا اعلى لتردد الموجات المرنة (الصوتية في المواد الصلبة ) قيمته تقريبا  $10^{15} \text{ Hz}$  لمعظم المواد الصلبة ( $\omega_n$ ) تعتمد قيمته على ثابت القوة  $c$  وكتلة الذرة  $m$  حيث  $\omega_n = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$
2. لكل متجه موجة  $k$  يقابله تردد زاوي  $\omega$  وان جميع الاهتزازات المحتملة تحدد بقيم  $k$  ضمن المدى  $(-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a})$  ويدعى هذا المدى بنطاق بريليون الاول وبعد نصف دورة  $(\pm \frac{\pi}{a})$  لكل من الجهتين يأتي نطاق بريليون الثاني  $(-\frac{2\pi}{a} \leq k \leq -\frac{\pi}{a})$  وكذلك  $(\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{2\pi}{a})$  وتتبعها منطقة بريليون الثالثة وهكذا .
3. اذا كانت  $\frac{ka}{2}$  صغيرة جدا :

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{ka}{2}$$

$$\omega = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{ka}{2}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} ka$$

وهذا يعني اذا كان  $\lambda \gg a$  فإن التردد الزاوي  $\omega$  يتناسب خطيا مع متجه الموجة  $k$  والسلسلة تتصرف وكأنها سلك مستمر

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} ka$$

$$\pi v = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{2\pi}{\lambda} a \quad \Rightarrow \quad \lambda v = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} a \quad \Rightarrow \quad V_{\circ} = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} a$$

اذا ضربنا طرفي المعادلة في  $k$

$$kV_{\circ} = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} ka$$

$$\omega = V_{\circ} k \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = V_{\circ}$$

عندما تصبح قيمة  $k = \pm \frac{\pi}{a}$

$$\lambda = 2a$$

وان الدالة  $\omega$  تنحني الى مماس افقي وتصبح قيمتها

$$\omega_m = \frac{2V_{\circ}}{a}$$

ولتحقق من ذلك :

$$\omega = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{ka}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{ka}{2} \frac{a}{a}$$

$$\omega = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \Rightarrow \quad V_o = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} a$$

$$\omega = \frac{2V_o}{a}$$

### Vibration modes of diatomic linear lattice

ان دراسة طيف الاهتزاز تزداد تعقيدا عندما تكون الشبكية ثنائية الذرة حيث تحوي الاولية الواحدة ذرتان قد تكونان متشابهتين بالكتلة مثل الماس او مختلفتين بالكتلة مثل كلوريد الصوديوم وفي حالة التفريق بين التردد الزاوي  $\omega$  او متجه الموجة  $k$  يظهر فرعان رئيسيان هما الفرع الصوتي (acoustical branch) والفرع البصري (optical branch) وكل منهما يظم موجات طولية و مستعرضه (  $L_A, T_A$  ) للفرع الصوتي (  $T_o, L_o$  ) للفرع البصري .

$L_A$ : longitudinal acoustical wave

$T_A$  : *transverse acoustical wave*

$T_o$  : longitudinal optical wave

$L_o$  : *transverse optical wave*

نفرض ان هناك سلسلة تحوي نوعين من الذرات كتلة الصغيرة  $m$  و الكتلة الكبيرة  $M$  مرتبة بالتعاقب بحيث ان اقصر مسافة بين الذرتين متعاقبتين هي وبذلك تكون دوريه السلسلة  $2a$  فاذا سلط اضطراب طولي لينتقل خلال البلورات فان ازاحة النوعين من الذرات سيملك سعات مختلفة .

