Chapter Three

Classical Free Electron Model:

We can understand a number of important physical properties of metals in term of the free electron model.

According to this model the most weakly bound electrons move about freely through the volume of the metal.

1. The Valence electrons of the atom become the conduction electrons.
2. Forces between conduction electrons and ions are neglected .
3. The total energy is all kinetic energy.
4. The potential energy is neglected.

Classical theory of free electron gas

[1]Drude theory for free electron conductivity:

ln the development of a classical free electron model for conduction it is seemed to assume that the mean free λ path of an electron would be cotrolled by elastic collisions with the + ve ions .

The first simple classical model for a free electron gas in a metal was described by drude (1900) .

ln (1905) Lorentz developed drude theory.

Drude supposed that moving electrons are scattered by random collisions with the ion cores. The term(random) is used here to indicate that the average velocity is zero after any scattering collision .

We can define the mean free time τ_m as the reciprocal of the collision probability perunit time .

Let us consider a group of n$_{\circ}$ electrons at time then the number of electrons which have survived without collision .Unit time t is :

$$n_t = n_{\circ} \exp\left(-t/\tau_m\right) \dots \dots (1)$$

The rate at which collisions are then removing electrons from the ranks of survivors is:

ان المعدل الزمني الذي بموجبه تزيل التصادمات بعضا من الالكترونات الناجية من اي تصادم خلال الزمن t يعطي بالعلاقة التالية:

$$-\frac{dn}{dt} = \frac{n_t}{\tau_m} = \frac{n_{\circ}}{\tau_m} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \dots \dots (2).$$

Now suppose that an electric field $\vec{E}$ has been present while these electrons have been moving and colliding . After a time t, an electron which has not yet been scattered has achieved adrift velocity.

$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{v}_t} = \left(-\frac{e\vec{E}}{m}\right) t \dots \dots (3).$$

Hence the distance traveled in the direction of the field is:

$$\overrightarrow{\mathrm{x}_t} = \frac{1}{2}\left(-\frac{e\vec{E}}{m}\right) t^2 \dots \dots (4).$$

The total electronic transport along the field direction for $n_{\circ}$ electrons in one free path is then:

$$\int_0^\infty \overrightarrow{\mathrm{x}_t} \left(\frac{dn}{dt}\right) dt = \left(\frac{-e\vec{E}n_{\circ}}{2m\tau_m}\right) \int_0^\infty t^2 \exp\left(\frac{-t}{\tau_m}\right) dt \dots \dots (5).$$

To simplify eq. (5) suppose :

$$y = \frac{t}{\tau_m}, t = \tau_m\, y, dt = \tau_m\, dy \dots \dots (6)$$

Then : $\int_0^\infty \overrightarrow{x_t}\left(\frac{dn}{dt}\right)dt = -\left(\frac{e\vec{E}n_\circ {\tau_m}^2}{m}\right)\int_0^\infty \frac{1}{2}y^2\, e^{-y}\, dy = -\frac{e\vec{E}n_\circ {\tau_m}^2}{m} = \left(-\frac{e\vec{E}n_\circ \tau_m}{m}\right)\tau_m$ …… (7).

ان المعادلة (7) تكافئ نقل $(n_\circ)$ من الجسيمات وجميعها تمتلك نفس زمن الاسترخاء ونفس معدل سرعة الانجراف .

$$\Delta\overrightarrow{v_t} = \left(-\frac{e\overrightarrow{E}\,\tau_m}{m}\right) \text{ …… (8).}$$

If we suppose that our metal has a total of n electrons/ m^3, all with constant drift velocity $\Delta\vec{v}$ in an electric field $\overrightarrow{E}$, then the electrical current density is :

اذا فرضنا ان الفلز يحتوي على عدد(n) من الالكترونات لكل متر مكعب وجميعها تتحرك بسرعة انجراف ثابتة $\Delta\vec{v}$في مجال كهربائي $\overrightarrow{E}$ فعليه تكون كثافة التيار الكهربائي :

$$J = (-en\Delta\vec{v}) = \frac{ne^2\tau_m\,\overrightarrow{E}}{m} = \sigma\overrightarrow{E} \text{ …… (9).}$$

$$where\ \sigma = \frac{ne^2\tau_m}{m} \text{ …… (10).}$$

σ represent the electrical conductivity.

حيث ان σ تمثل معامل التوصيل الكهربائي (التوصيلية الكهربائية) وهي كمية موجبة وغير متجهه.

σ is often expressed in term of drift mobility i.e.

يمكن التعبير عن σ باستخدام الحركية الانجرافية والتي تعرف بالسرعة الانجرافية المنتظمة لكل وحدة مجال كهربائي .

$$\mu = \frac{\Delta\vec{v}}{\overrightarrow{E}} = \frac{e\tau_m}{m} \text{ …… (11).}$$

Sub eq.(11) in eq.(10) ; we get :

$$\sigma = ne\mu \text{ …… (12).}$$

ويمكن كتابة المعادلة (10) بدلالة متوسط المسار الحر ودرجة الحرارة .

يعرف متوسط المسار الحر الالكتروني λ على انه المسافة التي يتحركها اي الكترون توصيل بفاعليه انطلاقه الحراري s_{th} خلال متوسط الزمن الحر τ_m .

يقصد بالانطلاق الحراري s_{th} بانطلاق الكترون عند حركته من مركز استطارة الى مركز استطارة اخر .

The conductivity is also cited in term of the electronic mean free path , then :

$$s_{th} = \frac{\lambda}{\tau_m} = \left(\frac{3\, k_B T}{m}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots (13).$$

Sub eq.(13) in eq.(10) ; we get :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_m}{m} = \frac{ne^2\lambda}{m s_{th}} = \frac{ne^2\lambda}{(3m\, k_B T)^{1/2}} \ldots\ldots (14).$$

وهكذا يمكن التعبير عن التوصيلية الكهربائية بموجب نظرية درود بالصيغ الثلاثة في المعادلة (14) . ويتضح بان σ تتناسب طرديا مع $T^{-1/2}$ وفوق مدى واسع من درجات الحرارة .وعند تبريد الفلز الى درجات حرارة واطئة فان σ تزداد بموجب T^{-5} . وبذلك تفشل نظرية درود في تفسير النتائج عند درجات الحرارة الواطئة وذلك لان الكترونات التوصيل لا تتصرف تماما كجزيئات الغاز المثالي وان الالكترونات لا ترتد عن اصطدامها بقلوب الايونات الموجبة .

Thermal conductivity :

The thermal conductivity coefficient K of as did id define as :

$$Q = -K\frac{dT}{dx}$$

Where Q is the flux of thermal energy , $\frac{dT}{dx}$ Is the temperature gradient .

From the kinetic theory of gases we fined the expression for the thermal conductivity :

$$k = \frac{1}{3}\, cv\ell.$$

Where c is the heat capacity per unit volume ,v is the phonon velocity , ℓ is the phonon mean free path.

ان المعادلة الاخيرة اعلاه تشير الى التعبير من معامل توصيل الحراري من خلال النظرية الحركية للغازات حيث , حيث تتعامل مع الفونونات كأنها غاز حر (غاز فونوني).

Thermal conductivity for free electron gas.

التوصيل الحراري للغاز الالكتروني الحر

يعرف التوصيل الحراري الالكتروني على انه انتقال الطاقة الحرارية للإلكترونات الحرة في الفلزات ويرمز لها $k_{e\ell}$. ان التوصيل الحراري بواسطة الفونونات الموجودة في الفلزات يمكن اهمالها وذلك لوفرة الكترونات التوصيل بشكل كبير جدا وهي التي تسيطر على عملية التوصيل الحراري

The drude kinetic argument we have used her for σ can applied to predict thermal cond.

$$k_{e\ell} = \frac{2}{3} s^2 c_{e\ell} \dots \dots (15)$$

$c_{e\ell}$ denotes the classical specific heat at constant v for the electron gas , which given by the relation :

$$c_{e\ell} = \frac{2}{3} k_B n \dots \dots (16).$$

Sub eq.(16) and eq.(13) in eq.(15) ; we get :

$$k_{e\ell} = n k_B \tau_m s^2 = \frac{3 n \tau_m {k_B}^2 T}{m} \dots \dots (17).$$

The relation between $k_{e\ell}$ and σ is define by Lorentz number , which can be given by :

ان النسبة بين $k_{e\ell}$ و σ لكل درجة حرارة يعرف بعدد لورنز وكما يلي :

$$L = \frac{k_{e\ell}/\sigma}{T} = 3(\frac{k_B}{e})^2 \ldots\ldots(18).$$

$$= 2.2 * 10^{-8}(\text{volt/kelvin})^2$$

ومن العلاقة الاخيرة اعلاه نجد ان عدد لورنز كمية ثابتة لا تعتمد على الكترونات التوصيل ولا على كتله الالكترون . وهذا العدد هنا محسوب على اساس النظرية الكمية بينما وجدت قيمة عدد لورنز حسب النظرية الكلاسيكية ب $1.1 * 10^{-8}(\text{v/k})^2$.

This is one of the most successes of Drude's model in the development of more complicated models.

[2] Lorentz theory for free electron conductivity:

لقد عمل العالم لورنز عام (1905) على تطوير نظرية درود للغاز الالكتروني الحر حيث نص فرضيته على ان جميع الالكترونات الحرة في الفلز لها انطلاق حراري واحد.

ولقد افترض لورنز بان الغاز الالكتروني الحر في الفلز يكون في حالة اتزان حراري ويمتلك سرعا تخضع لدالة توزيع السرع الكلاسيكية $f_{\circ}$ عند غياب تأثير اي مجال كهربائي خارجي فعند تسليط مجال كهربائي ينتج عن ذلك انجراف الالكترونات وينشأ تبعاَ لذلك دالة جديدة لتوزيع السرع ويطلق عليها f.

Let on electron field be applied to the metal, resulting in electron drift . the velocity distribution f , will differ from $f_{\circ}$. consider a uniform field $\vec{E}$ so that the special derivative of ($f-f_{\circ}$) is zero.

The rate at which f changes with time is the sum two different kind of distribution :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{field_{\text{تأثير المجال}}} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{scat._{\text{تاثير الاستطارة}}} \ldots\ldots(19).$$

Since force is rate of change of momentum , and an electron of speed mv and a force -e$\vec{E}$ in an electric field $\vec{E}$, then the first term on the right eq.(19) is :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{field} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right).\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \left(\frac{-e\vec{E}}{m}\right).\frac{\partial f}{\partial v} \dots\dots(20)$$

$$\Downarrow$$

$$or\ \left(\frac{e\vec{E}}{m}\right)$$

ان تفسير المعادلة (20) يدعى ان تأثير المجال الكهربائي في تغير توزيع السرع يعتمد على مشتقة دالة التوزيع بالنسبة للسرعة.

Thus the effect of an electric field in changing the distribution depend on the derivative of the distribution function with respect to velocity .

ان الاستطارة الحاصلة من التصادمات بين الالكترونات والايونات الموجبة تعمل على القضاء على اي تعجيل يحدث في المسار الحر الذي يسبق التصادم وعليه ينتج عن ذلك استحداث دالة توزيع السرع $f_\circ$ لتعمل على تخفيض $(f-f_\circ)$ الى اقل ما يمكن . بموجب ذلك افترض لورنز ان $(\frac{\partial f}{\partial t})_{scatt.}$ تتناسب طردي مع $f_\circ - f$ ويعبر عن ثابت التناسب بدلالة زمن الاسترخاء τ_r .

Scattering collisions of electrons and ions (+ve) eras any acceleration of the preceding free path , and to recreate a velocity distribution of the $f_\circ$. thus in considering the influence of collisions in minimizing $(f_\circ - f)$, Lorentz assume that $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{scatt.}$. would be directly proportional to $(f_\circ - f)$. the proportionally can be expressed in terms of a relaxation time τ_r:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{scatt.} = \left(\frac{f_\circ - f}{\tau_r}\right) \dots\dots(21).$$

With the aid eq.(20) and (21), we can rewrite eq.(19) in the form of a continuity equation .

$$\left(\frac{df}{dt}\right) + \left(\frac{e\vec{E}}{m}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{f_\circ - f}{\tau_r} = 0 \dots\dots(22).$$

وعند تسليط مجال كهربائي خارجي ثابت لزمن طويل بالمقارنة مع زمن الاسترخاء τ_r وحصول حالة الاستقرار يصبح الحد الاول من المعادلة (22) صفراً.

When a steady state is reached by applying a constant electric field for a time that is long compared with τ_r , the first term of eq.(22) must be zero . so that :

$$f = f_\circ + \left(\frac{\tau_r e\vec{E}}{m}\right) . \frac{\partial f}{\partial v} \dots \dots (23) .$$

Is the steady state perturbed distribution .

والتي تعبر عن دالة توزيع السرع الشوهة او المضطربة في حالة الاستقرار.

ان المعادلة (23) تعني ان الفلز يمتلك توصيل كهربائي محدد لان التكامل فوق f يحصل عند سرعة انجراف غير متلاشية وكامل الغاز الالكتروني الحر . فإذا افترضنا ان اتجاه المجال الكهربائي المسلط عن الفلز يكون بالاتجاه السيني السالب فان كثافة التيار تكون :

An integration over f yields a non-vanishing drift velocity for the entire electron gas. The metal has a finite electrical conductivity . if we suppose the field a long the X- direction, then the current density is :

$$J_x = -\int e v_x f . d\mathrm{v_x dv_y dv_z} \dots \dots (24).$$

ولما كان التكامل بالنسبة الى $f_\circ$ يساوي صفرا ز اي ان :

$$J_x = \sigma E_x = -\int \left(\frac{E_x e^2}{m}\right) \tau_r v_x \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) d\mathrm{v_x dv_y dv_z} \dots \dots (25).$$

ولحساب الطرف الايمن من المعادلة (25) نفترض ان زمن الاسترخاء τ_r يعتمد على قيمة انطلاق الالكترون وليس على اتجاه حركته وان τ_r يتغير مع انطلاق الالكترون .

Assume that τ_r depends only on the magnitude of electron speed , not on the direction of that motion:

$$\tau_r = A s^j \dots \dots (26).$$

ان هذا الافتراض يعمل به عادة عند حل معادلة بولتزمان . ان قيمة لا تعتمد على طبيعة تقنية الاستطارة وقد افترض لورنتز ان استطارة الالكترونات تكون مرنة عند تصادمها مع صفوف القلوب الايونية الموجبة

الساكنة نسبيا حيث يكون التغير في طاقة الالكترون طفيفة جدا بسبب الفرق الشاسع بين كتلة الالكترون وكتلة القلب الايوني الموجب . لذلك لا يعتمد متوسط المسار الحر λ على انطلاق الالكترون وهذا يتطلب اعتبار λ وكأنها الكمية A في المعادلة (26) وقيمة j تساوي ناقص واحد.

The exponent j depends on the nature of the scattering mechanism . now Lorentz assume that electrons were elastically scattered by the fixed array of ion cores.

The mean free path λ is dependent of electron speed . this requires us to identify λ as the quantity A in eq.(26), with j= -1 , i.e. :

$$\tau_r = \frac{\lambda}{s} \ldots \ldots (27).$$

Sub eq.(27) in eq.(25); we get :

$$\sigma = -\int \left(\frac{\lambda e^2\, \mathrm{v}_x}{ms}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\; d\mathrm{v_x} d\mathrm{v_y} d\mathrm{v_z} \ldots \ldots (28).$$

ويمكن تبديل التكامل في المعادلة (28) من السرعة v الى الانطلاق s ويمكن التعبير عن الانطلاق s بمركبات $\mathrm{v_z}, \mathrm{v_y}, \mathrm{v_x}$اي ان :

$$s^2 = \mathrm{v}_x{}^2 \mathrm{v_y}{}^2 \mathrm{v_z}{}^2 \ldots \ldots (29).$$

$$\because \mathrm{v_x} = \mathrm{v_y} = \mathrm{v_z} \ldots \ldots (30).$$

We can write :

$$\mathrm{v}_x{}^2 = \frac{1}{3} s^2 \ldots \ldots (31).$$

ومن ناحية اخرى فان حجم القشرة الكروية في فضاء السرع ذات نصف قطر s وسمك ds يساوي $4\pi s^2 ds$ لذلك يمكن اعادة المعادلة (28) بالصيغة الاتية :

This eq.(28) becomes :

$$\sigma = \frac{4\pi e^2}{3m} \int_0^\infty \lambda\, s^2 \left(\frac{-\partial f_\circ}{\partial s}\right) ds \ldots \ldots (32).$$

ويمكن حساب التكامل في المعادلة (32) باستخدام قيمة من دالة التوزيع المتزن Equilibrium distribution function .

$$f_\circ = f(v_x)f(v_y)f(-v_z) \quad then\ we\ get:$$

$$f_\circ = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-ms^2/2k_BT} \ldots\ldots(33).$$

وبتعويض المشتقة معادلة (33) في معادلة (32) واجراء التعويضات الرياضية فنحصل على :

$$\sigma = \frac{4ne^2\lambda}{3(2\pi m k_B T)^{1/2}} \ldots\ldots(34).$$

ان المعادلة 34 تعطي التوصيلية الكهربائية للفلز بموجب نظرية لورنتز للغاز الالكتروني وهي تشبه صيغة درود التوصيلية الكهربائية ان معادلة النقل لبولتزمان بموجب نظرية لورنتز تؤدي الى صيغة التوصيل الحراري وهي مشابه الى صيغة درود ولكنها اصغر من الصيغة المستنبطة بموجب نظرية درود بحوالي الثلث.