محاضرة (٥) / كهرومغناطيسية

معادلة الموجة غير المتجانسة لكل من الجهد العددي (ϕ) والجهد المتجهي ($\bar{A}$).

عند التعامل مع مجالات كهربائية ومغناطيسية متغيرة مع الزمن فاننا لا يمكننا ان نستعمل العلاقات الخاصة بالمجالات المستقرة وقد ~~سبق~~ اشرنا الى ذلك في الفقرات التي تمت مناقشتها من هذا الفصل وخاصة $\nabla\times\bar{E}$ حيث انها لا تساوي صفر وان $\nabla\times\bar{B}$ تختلف قيمته في حالة المجالات المتغيرة بالنسبة للزمن عما هو عليه في المجالات المستقرة - وبما ان العلاقة $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$ [معادلة ماكسويل الثالثة] تصح في كل الحالات [المجالات المتغيرة مع الزمن والمجالات المستقرة] كما ان تفرق دوران اي متجه يساوي صفر $\bar{\nabla}\cdot(\nabla\times\bar{A})=0$ -

لذلك يمكن ان نعرف المتجه $\bar{B}$ بدلالة الجهد المتجهي ($\bar{A}$) كالاتي،

$$\bar{B}=\nabla\times\bar{A} \quad \text{———} (1)$$

وهذا ما اشرنا عليه في الفصل الخامس عندما ناقشنا العنوان [دوار كثافة الفيض المغناطيسي والجهد المغناطيسي المتجهي $\bar{A}$]

وعلى هذا الاساس يمكن ان نعرف المتجه $\bar{E}$ بدلالة كل من الجهد العددي (ϕ) والجهد المتجهي $\bar{A}$ كالاتي،

$$\bar{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad \text{———} (2)$$

فاذا كانت $\bar{A}$ ثابتة القيمة فان $\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$ تساوي صفر ~~وتكون~~ وتصبح المعادلة (2) بالصيغة ،

$$\bar{E}=-\nabla\phi \quad \text{—} (3)$$

وهذا ما يحصل في الكهربائية المتغيرة .

وعند أخذ الدوار ($\nabla \times$) لطرفي المعادلة (2) نحصل على معادلة ماكسويل الأولى وكالآتي :

$$\nabla \times \bar{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) - \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad \text{---}(4)$$

وبما أن حسب المتطابقة دوران انحدار أي كمية عددية يساوي صفر فإن $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ وكذلك حسب العلاقة (1) فإن الحد الثاني في الطرف الأيمن للمعادلة (4) أي الحد $\nabla \times \frac{\partial A}{\partial t}$ يمكن أن يأخذ الصيغة الآتية :

$$\nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \times A)}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

وبهذا فإن المعادلة (4) تأخذ الصيغة الآتية :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \text{---}(5)$$

~~إن المعادلة (5)~~ إن المعادلة (5) تمثل معادلة ماكسويل الأولى ، وبذلك فإن التعريفين ϕ و $\bar{A}$ يتفقان مع معادلتي ماكسويل الأولى والثانية .

الآن سنبدأ باشتقاق معادلة الموجة لكل من $\bar{A}$ (الجهد المغناطيسي المتجه) و ϕ الجهد الكهربائي العددي وسوف يتم الاشتقاق باستخدام المعادلتين (2 و 4) في المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل أي المعادلة :

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 j + \mu_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \mu_0 \left(j + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \quad \text{--}(6)$$

وبجعل ~~[illegible]~~ $\bar{B}=\nabla\times\bar{A}$ نحصل على

$$\cancel{\nabla\times(\nabla\times\bar{A})=\mu\bar{j}_F}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{A})=\mu\bar{j}_F-\epsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi+\epsilon\mu\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)\ ---(7)$$

حيث ان $\bar{D}=\epsilon\bar{E}$ ، $\bar{E}$ ~~معوضا~~ معوضا عنها كما معرفة

في المعادلة (2) .

وباستخدام المتطابقة المتجهية :

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{A})=\nabla(\nabla\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}$$

فان المعادلة (7) تأخذ الصيغة الآتية :

$$\nabla^2\bar{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\bar{A}+\epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu j_F\ ---(8)$$

من الممكن ان ~~نختار~~ نختار أي قيمة للمقدار $\nabla\cdot\bar{A}$ بحيث *

لا يؤثر على قيمة المتجه $\nabla\times\bar{A}$ حيث ان الصيغة المتجهة يساوي الـ $\bar{B}$

($\nabla\times\bar{A}=\bar{B}$) لذلك ~~سوف~~ سوف نختار العلاقة التالية :

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=-\epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\ ---(9)$$

ان العلاقة (9) تسمى بشرط لورنس وبهذا فان

المعادلة (8) تأخذ الصيغة الآتية :

$$\boxed{\nabla^2\bar{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=-\mu j_F\ ---(10)}$$