The Electromagnetic ~~st~~ WAVE

Using the maxwell equation to derive the following relations which represent the electromagnetic wave:

$$\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$\nabla^2 H - \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{---(2)}$$

- إن اشتقاق معادلات الموجة الكهرومغناطيسية يتم باستخدام معادلات ماكسويل [حيث المعادلة (1) تمثل معادلة الموجة بدلالة المجال الكهربائي ($\bar{E}$) والمعادلة (2) تمثل معادلة الموجة بدلالة المجال المغناطيسي ($\bar{H}$).

By taking the curl $(\nabla\times)$ of two side of second maxwell's equation $\left(\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$

Thus:

$$\nabla \times (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = \nabla \times \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \quad \text{—— (3)}$$

But: $\bar{J} = \sigma \bar{E}$, ~~and~~ $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ and $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

Therefore:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{H}) = \sigma(\nabla \times \bar{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{E}) \quad \text{---}$$

~~8~~ -

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{H}) = -\sigma \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

since: $\bar{B} = \mu \bar{H}$

therefore $$\nabla \times (\nabla \times \bar{H}) = -\sigma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad \text{—— (4)}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 A$$ من خطأ يقصد

So that,
$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 H \quad \text{—— (5)}$$

substituting relation (5) in equation (4) we obtain:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 H = -\mu\sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}$$

But $\nabla(\nabla \cdot H) = 0$

So that: $$-\nabla^2 \bar{H} = -\mu\sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}$$

or:
$$\boxed{\nabla^2 \bar{H} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t} = 0} \quad \text{—— (6)}$$

وضح؟

المعادلة (6) هي نفس معادلة (2) المطلوب إثباتها -

By the same ~~meth~~ method take the curl of first Maxwell's equation ($\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$)

Thus: $$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\left(\nabla \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) \quad \text{——}$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) \qquad (7)$$

By using the second Maxwell's equation:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$ and put $\bar{B} = \mu \bar{H}$

equation (7) take the form:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \bar{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \qquad (8)$$

since: $\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E}$, $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ and $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

so that:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (9)$$

But: $\nabla(\nabla \cdot \bar{E}) = 0$

therefor equation (9) take the form:

$$-\nabla^2 \bar{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

or:

$$\boxed{\nabla^2 E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0} \qquad (10)$$

(و.هـ.م)

أي أن المعادلة (10) هي نفس المعادلة (1) المراد إثباتها.

- ان معادلات الموجة الكهرومغناطيسية الممثلة بالمعادلات (6) و (10) تمثيل المجال الكهرومغناطيسي في وسط مادي متشاكل وخطي حيث تكون كثافة الشحنة مساوية للصفر سواء كان الوسط موصل او غير موصل.

- ان المعادلات (6) و (10) تمثل معادلات نتائج ضرورية ومنطقية لمعادلات ماكسويل.

- الموجات الكهرومغناطيسية أحادية الطول الموجي يمكن وضعها كموجات تتميز بالتردد الاحادي.

- لنأخذ الحقل الكهربائي ($\bar{E}$) كدالة الزمن حيث ان

$$\bar{E}(r,t) = E_0(r,t)\, e^{-j\omega t} \quad \text{—— (11)}$$

$\bar{E}(r,t)$ is complex quantity (real or imaginary)

$$\frac{\partial \bar{E}(r,t)}{\partial t} = -j\omega E_0 e^{-j\omega t}, \text{ and: } \frac{\partial^2 \bar{E}(r,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{-j\omega t} \quad \text{—— (12)}$$

بالتعويض في المعادلة (12) بالمعادلة (10) نحصل على:

$$\nabla^2 E_0 e^{-j\omega t} + \omega^2 \epsilon\mu E_0 e^{-j\omega t} + j\omega\sigma\mu E_0 e^{-j\omega t} = 0$$

$$E_0 e^{-j\omega t}\left[\nabla^2 + \omega^2 \epsilon\mu + j\omega\sigma\mu\right] = 0$$

- ان نحصل من المعادلة (12) على حركة الموجات المستوية أحادية الطول الموجي في اوساط غير معزولة.