نظرية الاعداد

المرحلة الرابعة كلية التربية للعلوم الصرفة

م.م حيدر سوادي حمد

ا.د سنان عمر ابراهيم

مثال:

اثبت ان $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ان اول من اثبت صحة تلك العلاقة هو أبو بكر الكرخي, اما الحسن ابن الهيثم فقد اثبتها بطريقة مختلفة.

الاثبات:

نفرض ان $p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, اذن عندما $n=1$ نجد ان الطرف الأيمن

$1 = \frac{1\times2\times3}{6}$ والطرف الايسر $1^2 = 1$ أيضا وعليه فان p(1) عبارة صادقة.

والان افرض ان p(m) عبارة صادقة, نجد ان $\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

ولإثبات صحة العبارة p(m+1) لاحظ ان

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

وعليه فان

$$\sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6} = \frac{(m+1)[2m^2+7m+6]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}$$

إذا P(m+1) عبارة صادقة، وعليه فان p(n) عبارة صادقة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال:

اذا كان a,b عددين حقيقيين $n \in N^*$ فاثبت ان

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} a^{i-1}$$

الاثبات:

نفرض ان $\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} a^{i-1}$:p(n). اذا عندما $n=1$ نجد ان $L.H.S=1$ و $RH.S=1$

وعليه فان الطرفان متساويان وبالتالي $p(1)$ عبارة صادقة.

والان نفرض ان $p(m)$ عبارة صادقة. اذن $\frac{a^m-b^m}{a-b} = \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1}$.

ولاثبات صحة $p(m+1)$, لاحظ ان

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = \frac{a^{m+1} - ab^m + ab^m - b^{m+1}}{a - b} = a\left(\frac{a^m - b^m}{a - b}\right) + b^m$$

$$= a \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1} + b^m \;= a(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) + b^m$$

$$= a^m + a^{m-1}b + \cdots + ab^{m-1} + b^m \;\; b^m \;= \sum_{i=1}^{m+1} a^{(m+1)-i} b^{i-1}$$

وعليه فان $p(m+1)$ عبارة صادقة وبالتالي فان $p(n)$ صادقة لكل $n \in N^*$.

مثال:

اذا كان ab=ba ، فأن $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ لكل $n \in N^*$ حيث

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ يسمى هذا القانون "مبرهنة ذي الحدين" والتي يجب ان تنسب الى أبو بكر الكرخي

الاثبات:

لتكن $P(n):(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ اذا كانت n=1 فأن

$$R.H.S=\sum_{K=0}^{1}\binom{1}{K}a^{1-k}b^k=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b \quad L.H.S=a+b$$

وعليه فأن $p(1)$ صحيحة، والان لنفرض ان P(m)، اذا

وعليه فأن

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k(a+b)$$

،

$$=\left[\binom{m}{0}a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+....+\binom{m}{m}b^m\right](a+b)$$

$$=\binom{m}{0}a^{m+1}\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}\right]a^mb+.......+\left[\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right]a^{m+1+i}b^i+.....+\binom{m}{....}b^{m+1}$$

لكن $\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$ ، اذا

$$(a+b)^{m+1}=\binom{m+1}{0}a^{m+1}+......+\binom{m+1}{i}a^{m+1-i}b^i+.....+\binom{m+1}{m+1}b^{m+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{(m+1)-k}b^k$$

اذا P(m+1) صحيحة، وعليه فأن P(n) صحيحة لكل $n\in Z^*$