المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولاً: المعادلة القابلة لفصل المتغيرات Separable Equations

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

وهذه الدالة يجب أن تكون مستمرة بالنسبة للمتغير x.

وتكون على عدة حالات:

١. إذا كانت هذه المعادلة تابعة لـ x فقط:

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x) \cdot dx$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$y = \int f(x)\, dx + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

٢. إذا كانت المعادلة تابعة لـ y فقط:

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dy = f(y) \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة.

٣. إذا كانت المعادلة التفاضلية تابعة لـ x و y وقابلة لفصل المتغيرات تكتب بالشكل التالي:

$$y' = f(x, y) \Rightarrow f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$$

حيث f_1, f_2, g_1, g_2 دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة لـ x و y على أي مجال مغلق من $\mathbb{R}$.

نقسّم طرفي المعادلة على المقدار: $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام لها بفصل المتغيرات.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^3 + c \quad (e \text{ الطرفين}) \Rightarrow y = e^{x^3+c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$.

الحل:

نقوم بفصل المتغيرات بقسمة المعادلة التفاضلية على المقدار $(1-x)(1+y)$ فنحصل على

$$\int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dx}{1-x} = 0 \Rightarrow \ln(1+y) + \ln(1-x) = c$$

وبأخذ e الطرفين ينتج

$$(1+y)(1-x) = e^c = c_1$$

وهو الحل العام للمعادلة.

ملحوظة: عندما يكون هناك متغيرات لوغاريتمية نضع ثابت التكامل كمتغير لوغاريتمي أو إذا كانت أسية نضعه بشكل أسي وهكذا.

ملاحظة هامة: يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متغيراتها مباشرة ولكنها تؤول الى معادلات تفاضلية قابلة للفصل فمثلاً ان المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \ldots (*)\ ; a, b, c \text{ ثوابت}$$

هي معادلة تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها مباشرة ولذلك نجري عليها التحويل الاتي:

أولاً نفرض: $z = ax + by + c$

ثم نفاضل الطرفين: $\Rightarrow dz = a \cdot dx + b \cdot dy$

نقسم الطرفين على dx:

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة $(*)$ فيكون:

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب:

$$dx = \frac{dz}{b \cdot f(z) + a}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو:

$$x = \int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} + c$$

وبالمثال يتضح المقال.

<u>مثال:</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x + y + 1$

<u>الحل:</u>

نكتب المعادلة بالشكل: $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$

نلاحظ أنها غير قابلة لفصل المتغيرات مباشرة لذلك نفرض: $z = x + y + 1$

ثم نفاضل الطرفين: $\Rightarrow dz = dx + dy$

نقسم الطرفين على dx: $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الأساسية فيكون $\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب:

$$dx = \frac{dz}{1+z}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x = \ln|1+z| + \ln c = \ln|x+y+2| + \ln c \Longrightarrow y = \frac{e^x}{c} - x - 2$$

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$

2) $\frac{dy}{dx} = y^2 x$

3) $y' = -2y, \qquad y(1) = -5$

4) $(2y + xy)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

5) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

6) $2y\frac{dy}{dx} = e^{x-y^2}, \qquad y(4) = 2$

7) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

8) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$

9) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

10) $\dfrac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y' = x\sin(x^2)$

2) $y' = e^{-y}$

3) $y' = y^3$

4) $\dfrac{dy}{dx} = y\tan x$

5) $2xyy' = 1 + y^2$

6) $y' = xy(y+1)$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{2y-1}$

8) $y' = \sqrt{1-y^2}\cos x$

9) $y' = y\sin x$

10) $y' = y^2x^3, y(1) = 2$

11) $y' = x\sqrt{y}, \qquad y(0) = 3$

12) $y' = \dfrac{\ln x}{y}, y(1) = -2$

13) $y' = xy - y + 2x - 2, y(0) = 0$

14) $y' = (y^2 - 3y + 2)\sqrt{x}, \qquad y(1) = 2$

16) $y' = e^y(y-4)\sin x, y(2) = 4$

17) $y' = (x^2-4)(3y+2)$

18) $y' = 6x^2 + 4x$

19) $y' = \sec y + \tan y$

20) $y' = xy + 3x - 2y - 6$

21) $y' = (2x+3)(y^2-4), \qquad y(0) = -1$

22) $6y' = (2x+1)(y^2-2y-8)$