المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations

ان المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى يمكن التعبير عنها بالصيغة

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث $a_1(x), a_0(x), b(x)$ تعتمد فقط على المتغير المستقل x وليس على المتغير y وكمثال على ذلك المعادلة التفاضلية

$$x^2\sin x-(\cos x)y=(\sin x)\frac{dy}{dx}$$

خطية لأننا يمكن ان نكتبها بالصورة

$$(\sin x)\frac{dy}{dx}+(\cos x)y=x^2\sin x$$

والمعادلة التفاضلية

$$y\frac{dy}{dx}+(\sin x)y^3=e^x+1$$

ليست خطية لأنه لا يمكن كتابتها بصيغة المعادلة (1).

ان الصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

وتعد المعادلة أعلاه خطية بالنسبة للمتغير y.

ملاحظة: قد تكون المعادلة التفاضلية خطية بالنسبة الى أي متغير اخر كأن يكون x عندها تصبح المعادلة التفاضلية (2) بالشكل

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=f(y)$$

وتسمى المعادلة أعلاه معادلة تفاضلية خطية بالنسبة لـ x.

طريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية

١) تذكر أن تضع المعادلة الخطية بالصيغة المذكورة في المعادلة (2).
٢) من الصيغة القياسية للمعادلة نجد عامل التكامل $\mu = e^{\int p(x)dx}$.
٣) نعوض عامل التكامل في العلاقة

$$\mu . y = \int \mu . f(x)dx \dots\dots\dots (*)$$

٤) نجري التكامل في الطرف الأيمن فنحصل على الحل y.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

الحل:

نلاحظ ان المعادلة بالصيغة القياسية لذا نحلها مباشرة حيث $p(x) = -3 \ , f(x) = 0$

نجد عامل التكامل و الذي يساوي

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

نعوض عامل التكامل في العلاقة (*) فنحصل على

$$e^{-3x} y = \int e^{-3x} . (0)dx \Rightarrow e^{-3x} y = c \Rightarrow y = ce^{3x}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$

الحل:

المعادلة المطلوب حلها ليست بالصيغة القياسية لذا يجب تحويلها الى الصيغة القياسية ثم حلها

بالقسمة على x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$$

الان نجد عامل التكامل

$$\mu = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

بتعويض عامل التكامل في العلاقة (*) ينتج

$$x^{-4} y = \int x^{-4} x^5 e^x dx \Rightarrow x^{-4} y = \int x e^x dx$$

وبتكامل الطرف الأيمن بالتجزئة نحصل على

$$x^{-4}y = xe^{x} - e^{x} + c$$

وبضرب طرفي المعادلة بالحد x^4 نجد أن

$$y = x^5e^{x} - x^4e^{x} + cx^4$$

وهو الحل العام للمعادلة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{4}{x+2}\right)y = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$

3) $\dfrac{dx}{dy} + \left(\dfrac{4}{y+1}\right)x = \dfrac{y}{y+1}$

4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$

5) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = 1$

6) $\dfrac{dy}{dx} - (\tan x)y = \sec x$

7) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{(\cos x)^2}y = \dfrac{1}{(\cos x)^2}\tan x$

8) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x^2$

9) $\dfrac{dy}{dx} + y = xe^{-x}$

10) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = xe^{x}$

11) $x(x-1)\dfrac{dy}{dx} + (2-x)y = 2x - 1$

12) $x(x-1)\dfrac{dy}{dx} + (2-x)y = x^2(2x-1)$

13) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y\ln y}{x - \ln y} = 0$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$

2) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x, y(0) = 3$

3) $x \ln x \dfrac{dy}{dx} + y = 2\ln x$

4) $\dfrac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x\,, y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

5) $(1 + x^2)dy = (\tan^{-1} x - y)dx$

6) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

7) $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$

8) $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = e^{\cos x}$

9) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3$

10) $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}(x + 1)^2$

11) $\left(\dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{dy} = 1$

12) $y \ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$

13) $(1 + y)^2 dx = (tan^{-1}y - x)dy$

14) $r\sin\theta\, d\theta + (r^3 - 2r^2\cos\theta + \cos\theta)dr = 0$

15) $cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

16) $3x(1 - x^3)y^2 \dfrac{dy}{dx} + (2x^2 - 1)y^3 = ax^3$

17) $\frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x = 1$

18) $x\cos x + x\sin x + y\cos x = \tan x$

19) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = e^{\cos x}$

20) $x^3\frac{dy}{dx} + 4x^2\tan y = e^x \sec y$

21) $x\frac{dy}{dx} + y(1 + x\cot x) = x$

22) $3y^2\frac{dy}{dx} + xy^3 = x$

23) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$

24) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

25) $x\frac{dy}{dx} - y = -2x$

26) $x\frac{dy}{dx} + 2y = 2$

27) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3$

28) $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^4}$

29) $x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y\ln y$

معادلة برنولي Bernoulli Equation

المعادلة التفاضلية بالصيغة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث n أي عدد حقيقي تسمى **معادلة برنولي**.

لاحظ انه إذا كانت $n = 0$ أو $n = 1$ فأن المعادلة (1) معادلة تفاضلية خطية لذا يجب ان تكون $n \neq 1$ لكي تكون المعادلة غير خطية ويمكن أن تكون $n = \frac{1}{2}$ بما أن قيمة n حقيقية، **ولإيجاد الحل لمعادلة برنولي نتبع الخطوات التالية:**

١- نقسم حدود المعادلة على y^n فتصبح المعادلة بالشكل

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x)$$

$$\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x) \ldots\ldots\ldots (2)$$

٢- نغير المتغير المعتمد من y الى z حيث $z = y^{1-n}$.

٣- نشتق بالنسبة الى x فنحصل على

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots (3)$$

٤- نعوض المعادلة (3) والمقدار $z = y^{1-n}$ في المعادلة (2) فنحصل على

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$$

والمعادلة الناتجة أعلاه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها بإيجاد عامل التكامل كما درسنا في المحاضرة السابعة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2xy^2$

2) $\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$

3) $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$

5) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$

7) $x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2$

8) $\frac{dy}{dx} = x^3y^2 + xy$

واجب بيتي HOMEWORK

أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = e^xy^4$

2) $(x^3y^2 + xy)dx = dy$

3) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^3\sec x$

4) $xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$

5) $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + x\tan y = x^3$

6) $(x^3y^3 + xy)dx = dy$

7) $xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$

8) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2\ln x$