المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

قبل أن نعرف ما هي المعادلة التفاضلية التامة يجب ان نعرف ما هو التفاضل التام لدالة وذلك عن طريق التعريف الاتي:

تعريف: **التفاضل التام Total Differential**

إذا كانت لدينا الدالة $f(x,y)$ دالة في متغيرين x,y فالعلاقة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \dots\dots\dots (1)$$

تسمى التفاضل التام للدالة $f(x,y)$.

وإذا ساوى الطرف الأيمن للمعادلة (1) صفراً فان $f(x,y) = c$ حيث c ثابت اختياري.

تنويه: يسمى المقدارين $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ المشتقتان الجزيئيتان للدالة f بالنسبة الى x,y على التوالي فاذا اشتققنا الدالة جزئياً بالنسبة الى x فاننا نعتبر y ثابتاً وإذا اشتققنا الدالة جزئياً بالنسبة الى y فاننا نعتبر x ثابتاً وهكذا دواليك بالنسبة لبقية المتغيرات.

مثال: أوجد كلاً من $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ للدالة $f(x,y) = 1 + e^x y^2 + x e^x y$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y^2 + x e^x y + e^x y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x y + x e^x$$

مبرهنة: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالصيغة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

فنقول عن المعادلة التفاضلية بأنها تامة **Exact** إذا تحقق الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

طريقة الحل

بعد التأكد من أن المعادلة التفاضلية معادلة تامة نتبع الخطوات التالية:

١) نجد الدالة $f(x,y)$ من خلال العلاقة

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx \dots\dots\dots (*)$$

٢) نجد الدالة $g(x,y)$ من خلال العلاقة

$$g(x,y)=\int N(x,y)dy \dots\dots\dots (**)$$

٣) نجد الحل العام للمعادلة من خلال العلاقة

$$f(x,y)+g(x,y)=c$$

مع ملاحظة عدم تكرار الحدود المتشابهة الناتجة من العلاقتين $(*),(**)$.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x^2y^3dx+x^3y^2dy=0$

الحل:

بإلقاء نظرة سريعة على المعادلة نجد أن

$$M(x,y)=x^2y^3 \quad ,N(x,y)=x^3y^2$$

نجد كلاً من $\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial M}{\partial y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2y^2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2y^2$$

نلاحظ أن $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ لذا فان المعادلة تامة، الان نجد الحل العام لها

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx=\int x^2y^3dx=\frac{x^3y^3}{3}$$

$$g(x,y)=\int N(x,y)dy=\int x^3y^2dy=\frac{x^3y^3}{3}$$

والحل العام هو

$$f(x,y)+g(x,y)=c \Rightarrow \frac{x^3y^3}{3}=c$$

مع ملاحظة أننا التزمنا بعدم تكرار الحدود المتشابهة.

تمارين (تحل في المحاضرة)

أولاً: بيّن أن المعادلات التفاضلية التالية تامة ثم جد الحل العام لها

1) $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$

2) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

3) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

4) $(4x^3y^2 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

5) $(4x - 3y - y\sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy = 0$

6) $(2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0$

7) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x^3}\right)dx - \frac{1}{x^2}dy = 0$

8) $(y^2 - 1)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$

ثانياً: جد قيمة k التي تجعل المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم جد حلها

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

ثالثاً: جد قيمة الدالة $N(x,y)$ التي تجعل المعادلة التفاضلية التالية تامة

$$\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x,y)dy = 0$$

واجب بيتي HOMEWORK

أولاً: بيّن أن المعادلات التفاضلية التالية تامة ثم جد الحل العام لها

1) $(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$

2) $(x^4 - 2xy^2 + y^4)dx - (2x^2y - 4xy^3 + \sin y)dy = 0$

3) $(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$

4) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

5) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

6) $y\sin 2x\,dx-(1+y^2+cos^2x)dy=0$

7) $(\sec x\tan x\tan y-e^x)dx+\sec x\,sec^2y dy=0$

8) $(2xy+y-\tan y)dx+(x^2-xtan^2y+sec^2y)dy=0$

9) $(2xy^4+\sin y)dx+(4x^2y^3+x\cos y)dy=0$

10) $(2xe^y+e^x)dx+(x^2+1)e^ydy=0$

11) $dy+\dfrac{y-\sin x}{x}dx=0$

12) $\dfrac{y\ln x^2\,dy+\frac{y^2}{x}dx}{x\ln y^2\,dx+\frac{x^2}{y}dy}=1$

ثانياً: جد قيم k التي تجعل المعادلات التفاضلية الاتية معادلات تامة.

1) $\left(1+e^{\frac{kx}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

2) $(2xy^2+3ye^{-2x}-1)dx+(2x^2y+ke^{-2x}-1)dy=0$