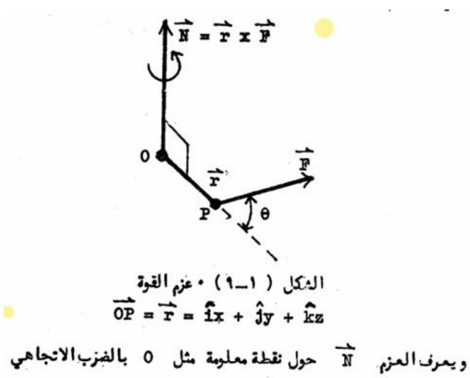
المحاضرة الثالثة

عزم القوة Moment of a Force

من التطبيقات المفيدة وبصورة خاصة للضرب الاتجاهي هو تمثيل العزم لنفرض ان القوة

$\overrightarrow{F}$ تؤثر في النقطة P(x , y , z)، كما هومبين في الشكل (3-١)- ولنمثل المتجه OP بالرمز $\overrightarrow{r}$ اى ان



الشكل (3-١) • عزم القوة

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r} = ix + jy + kz$$

ويعرف العزم 1 حول نقطة معلومة مثل 0 بالضرب الاتجاهي

من المثال (١) عندنا -

جد وحدة متجهة عمودية على المستوى الذى يحوى المتجهين

$\overrightarrow{A} = 2\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$,   , $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$

من المثال (1) عندنا

اذن $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} - 3\hat{k}$,   , $\overrightarrow{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$

$$n = \frac{\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}}{\left|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right|} = \frac{\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} - 3\hat{k}}{(1^2 + 3^2 + (3^2))}$$

$$= \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{19}} - \frac{\mathbf{3}\,\hat{\jmath}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{k}}{\sqrt{19}}$$

تغيير نظام الاحداثيات Change of Coordinate System

افرض ان المتجه A قد مثل بدلالة الثلاثي ijk على النحو التالي :-

$$\vec{A} = \hat{\imath}\, A_X + \hat{\jmath}\, A_y\, \hat{K}\, A_z$$

جديد ثلاثي بدلالة A المتجه نفس ومثل $\hat{\imath}^{\prime}\ \hat{\jmath}^{\prime}\ \hat{k}$

اتجاهه يختلف عن اتجاء $\hat{\imath},\ \hat{\jmath}\ ,\ \hat{K}$ على النحو التالي

$$\vec{A} = \hat{\imath}^{\prime} A_{x^{\prime}} + \hat{\jmath}^{\prime} A_{y^{\prime}} + \hat{K}^{\prime} A_{z^{\prime}}$$

الان الضرب العددى $\hat{\imath}^{\prime} \cdot \vec{A}$ عبارة عن $A_{x^{\prime}}$ مسقط $\vec{A}$ على الوحدة المتجه $\hat{\imath}^{\prime}$ و هكذا يمكننا كتابة

$$\begin{aligned}
A_{x'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')A_z \\
A_{y'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')A_z \\
A_{z'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{k}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')A_z
\end{aligned}$$

وقد تسمي الضرب العددى $\hat{\imath}^{\prime} . \hat{\imath}$ و$\hat{\jmath}^{\prime} . \hat{\imath}$ وهلم جرا

يمعامل التحويل Coefficients of Transformation وهي تساوى جيوب تمام الزوايا بين المحاور ذات الفتحه وبين التي بدون فتحه. وبالتماثل يعبر عن مركبات المحاور الاخيرة على النحو التالي: -

$$\begin{aligned}
A_x &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})A_{z'} \\
A_y &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})A_{z'} \\
A_z &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})A_{z'}
\end{aligned}$$

جميع معاملات التحويل في المعادلات أعلاه قد ظهرت في المعادلات السابقة لان

$\hat{\imath}\,.\hat{\imath}' = \hat{\imath}'.\,\hat{\imath}$ وهلم جرا

ولكن تلك التي في صـــفوف معادلات اعلاه قد ظهرت في اعمدة حد ود -المعادلات) وبالعكس. ان قوانين التحويل التي عبرت عنها هاتان المجموعتان من المعادلات هي خواص عامة للمتجهات، وهما تكونان في الحقيقة طريقة أخرى لتعريف المتجهات [٤].

ان رمز المصـغوف Matrix يمكن ان يعبر عن معادلات التحويل بصـورة ملائمة حيث تكتب المعادلات على الشكل التالي :-

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

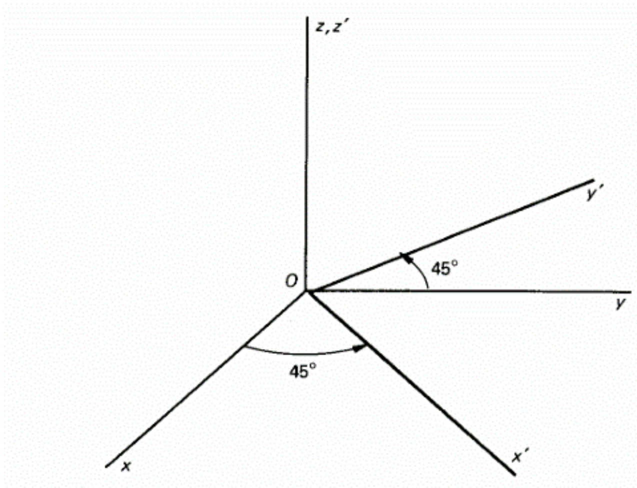
ويسـمى المصـفوف ٣ في ٣ المذكور ترا بمصـفوف التحويل ومن فوائده امكانية اسـتخدام عدة تحويلات متتابعة بسهولة وذلك بضرب مصفوف كل تحويل في الاخر .

امثلة

1 – مثل المتجه $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{K}$

بدلالة الثلاثي $\hat{k}'\ \hat{\jmath}'\ \hat{\imath}'$ افرض ان المحورين $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ دارا بزاوية 45 حول المحور – $\mathbf{z}$ ويتطابق المحورن $\mathbf{z}$ و $\mathbf{z}'$

كما هوميين في الشكل (١ - 4) وبالرجوع الى الشكل



الشكل (١ - 4) دورت المحاور ذات الفتحة oxyz بزاوية ٤٥° حول المحور - z.

تحسب معامل التحهل كالاتي : -

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = 1/\sqrt{2} \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' = 0$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = -1/\sqrt{2} \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = 1/\sqrt{2} \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' = 0$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' = 0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' = 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = 1$$

$$A_{x'} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad A_{y'} = \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad A_{z'} = 1$$

وبذلك يمكن كتابة المتجه A بدلالة المحاور ذات الفتحة على النحو التالي: -

$$\mathbf{A} = \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + \mathbf{k}'$$

٢ - جد مصفوف التحويل عند دوران المحاور ذات الفتحة بزاوية θ حول المحور – **z**

(المثال السابق حالة خاصة لهذه الحالة) . عندنا

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = \cos\phi$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = -\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = \sin\phi$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = 1$$

وكل ضرب عددى اخر يساوى صفرا. اذن صغوف التحويل يكون

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$